Univerzita Karlova v Praze

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Řešení úloh o objemu a povrchu těles žáky 9. ročníku ZŠ

Solving of problems dealing with volume and surface in the three-dimensional space by 15-16-year old pupils (9th grade)

Bc. Michaela Dlouhá

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: Učitelství všeobecně vzdělávacích předmětů pro základní školy a střední školy chemie — matematika

2015

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma Řešení úloh o objemu a povrchu těles žáky 9. ročníku ZŠ vypracovala pod vedením vedoucího práce samostatně za použití v práci uvedených pramenů a literatury. Dále prohlašuji, že tato práce nebyla využita k získání jiného nebo stejného titulu.

V Kladně dne 20. 7. 2015

....

podpis

Především bych chtěla poděkovat vedoucí své diplomové práce paní prof. RNDr. Jarmile Novotné, CSc., za odborné vedení, cenné rady a podněty, kontrolu práce a poskytnutý čas, který věnovala mé práci.

Dále bych chtěla poděkovat vedení ZŠ Amálská za to, že mi umožnilo provést testování žáků 9. tříd. A v neposlední řadě bych chtěla poděkovat celé své rodině a příteli za podporu a trpělivost.

Abstrakt

Tématem mé diplomové práce řešení úloh o objemu a povrchu těles Cílem práce je sestavit vlastní didaktický test a analyzovat postupy řešení matematických úloh u žáků devátého ročníku ZŠ Amálská, porovnat výsledky dosažené v testu u žáků ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů s žáky z „klasické[1]“ třídy a zjistit míru úspěšnosti u žáků ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů a žáků z „klasické“ třídy při řešení matematických úloh. Zaměřila jsem se pouze na jehlan a kužel, protože se většinou probírají v 9. ročnících na základních školách až po přijetí žáků na střední školy, a také protože po prostudování školního vzdělávacího programu vybrané školy jsem zjistila, že mají obě třídy (se zaměřením i „klasická“) stejné výstupy z daného učiva.
Svou diplomovou práci jsem rozdělila do dvou částí, a to na teoretickou část a praktickou část. Teoretická část obsahuje pět kapitol. V první kapitole se věnuji didaktickým testům a jejich tvorbě. V další kapitole se věnuji hodnocení obecně a školnímu hodnocení. Ve třetí kapitole je vymezen pojem slovní úloha. Ve čtvrté kapitole se věnuji řešení slovních úloh. V poslední kapitole vymezuji pojem geometrické těleso. V praktické části jsou popsány cíle a metody šetření, charakteristika výzkumného vzorku, tvorba didaktického testu, složení didaktického testu a analýza žákovských řešení.

Klíčová slova: slovní úloha, didaktický test, hodnocení, objem, povrch, jehlan, kužel

[1] třída bez zaměření

Abstract

The topic of my diploma thesis is the solution to exercises of volume and surface of 3D solids. The aim of the thesis is to make own didactic test and to analyse the methods of solution to math exercises in the 9th grade students of ZŠ Amálská. Also to compare the results of the tests in math and science orientated class to "normal[2]" class and to find out the success rate of solutions in both classes. I focused only on pyramid and cone, because they are part of curriculum in 9th grade of basic schools after students are admitted to high schools, and after examination of educational programme of chosen school I realised that both classes had the same outputs of given schoolwork.

I divided my thesis into two parts - theoretical and practical part. Theoretical part contains five chapters. In the first chapter I focus on didactic tests and their making. In the next chapter I deal with evaluation in general and school evaluation. In the third part there is the term of word exercise defined. In the fourth chapter there are solutions to the word exercises. And in the last chapter I define the term geometrical solid. In the practical part there are the aims and methods of survey, characteristic of research sample, making of didactic test, content of didactic test and analysis of students' solutions described.

Keywords: word exercise, didactic test, evaluation, volume, surface, pyramid, cone

[2] class without specialization

Obsah

Úvod

Při výběru tématu diplomové práce jsem vycházela ze své bakalářské práce. Rozhodla jsem se ji použít jako odrazový můstek. Z tohoto důvodu jsem si vybrala na katedře matematiky a didaktiky matematiky podobné téma, a to Řešení úloh o objemu a povrchu těles. Když jsem měla toto téma vybrané, přemýšlela jsem, jak jej správně uchopit.

Od začátku jsem byla rozhodnutá, na které škole chci své šetření provést. Vybrala jsem si základní školu Amálská v Kladně, která je zařazena do skupiny škol se zaměřením – rozšířená výuka matematiky a přírodovědných předmětů. Každý rok je na druhém stupni otevřena jedna třída s tímto zaměřením. Tuto školu jsem si vybrala záměrně, neboť jsem ji sama kdysi navštěvovala a vždy mě zajímalo, jak velký rozdíl je mezi třídou se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů a „klasickou“ třídou.

Cílem práce je sestavit vlastní didaktický test a analyzovat postupy řešení matematických úloh u žáků devátého ročníku ZŠ Amálská, porovnat výsledky dosažené v testu u žáků ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů s žáky z „klasické“ třídy a zjistit míru úspěšnosti u žáků ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů a žáků z „klasické“ třídy při řešení matematických úloh.

Nakonec jsem se rozhodla, že se zaměřím pouze na dvě tělesa, a to jehlan a kužel, protože se většinou probírají v 9. ročnících na základních školách až po přijetí žáků na střední školy a zajímalo mě, zda této látce žáci věnují dostatečnou pozornost. Dalším důvodem bylo, že jsem po prostudování školního vzdělávacího programu vybrané školy zjistila, že mají obě třídy stejné výstupy z daného učiva, což mi přišlo vhodné pro porovnání výsledku a zjištění míry úspěšnosti.

Práce je rozdělena na dvě části, a to na teoretickou a praktickou část.

Teoretická část má pět kapitol. V první kapitole se věnuji didaktickému testu a jeho tvorbě. Druhá kapitola se zabývá hodnocením obecně, školním hodnocením a jeho cíli, funkcemi, fázemi a formami. Ve třetí kapitole vymezuji pojem slovní úloha. Ve čtvrté kapitole definuji postup řešení úloh a způsob jejich řešení. V poslední kapitole teoretické části uvádím definici geometrického tělesa obecně, objem a povrch těles a základní charakteristiky, vlastnosti a vzorce pro výpočet povrchu a objemu jehlanu a kužele.

Praktická část se skládá ze čtyř kapitol. Jedná se o kapitoly šest až devět. Šestou kapitolu jsem pojala jako úvodní kapitolu praktické části, kde uvádím cíle a metody mého šetření. V sedmé kapitole charakterizuji školu a žáky, které jsem si pro své šetření vybrala. V osmé kapitole uvádím, jak jsem tvořila didaktický test. Devátou kapitolu věnuji jednotlivým úlohám, které jsem použila ve svém testu, jejich charakteristice, správnému řešení a analýze žákovských prací.

Všechny přímé citace v mé práci jsou uvedeny v uvozovkách a kurzívou, pouze slovní úlohy jsou bez uvozovek a kurzívy, za textem mají uvedený zdroj v závorce. Zadání úloh jsou buď převzata, nebo inspirována učebnicemi a sbírkami pro základní a střední školy, které jsou uvedeny v seznamu literatury. Obrázky a náčrtky v mé práci jsou pouze ilustrativní, vzdálenosti ani poměry neodpovídají skutečnosti a některé jsou také převzaty z literatury. Pokud zaokrouhluji, používám symbol $\cong$. V analýze zaokrouhluji počty procent na dvě desetinná místa.

Teoretická část

1. Didaktické testy

Žák i učitel potřebuje zpětnou vazbu o úrovni zvládnutí probíraného učiva. Formy zjišťování této úrovně mohou být různé od ústní zkoušky přes písemné práce, „desetiminutovky“, praktické úkoly, projekty až po didaktické testy v závislosti na tom, co je jejich hlavním cílem. (Schindler, 2006, s. 8) Každá forma má své výhody a nevýhody a záleží také na konkrétním předmětu, učivu, věku, schopnostech a osobnostech žáků.

1.1. Ústní zkoušení

Každý z nás si určitě vzpomene na ústní zkoušení a některým se určitě vybaví i chvíle, kdy se u tabule cítili znevýhodněni.

Ústní zkoušení má svůj význam při ověřování dovedností a znalostí žáka. Hlavně při hodnocení žákova ústního projevu je nezastupitelné, protože nemívá daný časový limit (odpadá s tím spojený stres z nedostatku času) a umožňuje individuální přístup k jednotlivým žákům. Oproti písemným testům má řadu prvků, které mohou být zdrojem nerovných podmínek. Za tyto podmínky můžeme považovat různou obtížnost a obsah otázek, různou délku zkoušení, prostředí, formu zadání, žákův handicap v mluvené řeči, subjektivní postoj učitele, dále také aktuální psychický stav žáka atd. (Schindler, 2006, s. 8)

1.2. Definice didaktického testu

Pojem didaktický test je u různých autorů definován různě, ale shodují se v tom, že se jedná o zkoušku. Tato zkouška se zaměřuje na objektivní zjišťování úrovně zvládnutí učiva u určité skupiny osob. (Chráska, 2007, s. 184)

Ve své práci budu vycházet z definice didaktického testu podle Byčkovského (1984, v Pelikán, 1998, s. 171), který charakterizuje didaktický test jako ***„nástroj systematického zjišťování (měření) výsledků výuky“.*** Tuto stručnou formulaci považuji za výstižnou.

1.3. Druhy didaktického testu

Chráska (2007, s. 185) rozlišuje testy podle klasifikace, kterou navrhl Byčkovský:

- testy rychlosti
- testy úrovně
- testy standardizované
- nestandardizované didaktické testy
- testy kognitivní a testy psychomotorické
- testy výsledků výuky a testy studijních předpokladů
- testy relativního a absolutního výkonu
- testy vstupní, průběžné a výstupní
- testy monotematické a polytematické
- testy objektivně skórovatelné a subjektivně skórovatelné

Testy rychlosti ověřují, jak rychle žák dokáže řešit dané úkoly. Úkoly jsou obvykle méně komplexní. Jejich počet většinou překračuje možnosti dané časovým limitem.

Testy úrovňové ověřují, jestli žák dokáže řešit úlohy se stupňující se obtížností. Tyto úlohy nejsou časově omezené a mají prověřit úroveň vědomostí.

Standardizované testy jsou připravovány profesionálně a jsou důkladně prověřeny. Zadávají se většímu počtu žáků. Ke standardizovaným testům musí být připojeny informace o zadávání a vyhodnocování testu pro zadavatele. Na tvorbě těchto testů se většinou podílí několik autorů, aby byl test vyvážený. Test by měl být posouzen dalšími profesionály a poté by měl být testován na vzorku žáků. Mezi plošně zadávané testy patří např. státní maturita, různé matematické soutěže jako je Matematická olympiáda či Matematický klokan, dále národní srovnávací zkoušky, které organizuje Scio a podobné organizace.

Nestandardizované testy, u nichž nebyly realizovány kroky obvyklé při přípravě a ověřování testů standardizovaných, označujeme jako testy nestandardizované. Zpravidla je učitelé připravují sami pro vlastní potřebu, nazývají se proto také testy učitelské či neformální. Jejich ověření neproběhlo na větším počtu žáků a nejsou tedy známy všechny jejich vlastnosti. Slouží pro zjišťování výsledků výuky jak za kratší časové období (téma, tematický celek), tak i za delší časové období. Svým obsahem mohou zachycovat specifický přístup k učební látce charakteristický pro učitele, který je sestavuje.

Kognitivní testy měří úroveň (kvalitu) znalostí a intelektových dovedností žáků.

Psychomotorické testy ověřují psychomotorické dovednosti, jako např. psaní na stroji.

Testy studijních předpokladů měří úroveň obecnějších charakteristik žáka, které jsou potřebné k dalšímu studiu.

Testy výsledků výuky měří to, co se žáci za nějaký čas a v dané oblasti naučili.

Testy relativního výkonu (testy srovnávací) vzájemně porovnávají výsledky jednotlivých žáků. Na základě řešení testu jsou žáci seřazeni podle dosažené úspěšnosti. Zda je konkrétní žák hodnocen jako úspěšný nebo neúspěšný, závisí mimo jiné na výkonech ostatních žáků.

T**esty absolutního výkonu (testy ověřovací)** ověřují, zda si žák osvojil určité znalosti a dovednosti, které jsou předem stanoveny jako podstatné. Výsledek konkrétního žáka není porovnáván s výsledky dalších žáků, ale s předem stanovenými kritérii.

T**esty vstupní, průběžné** a **výstupní** jsou rozděleny dle časového zařazení do výuky. U vstupních testů je cílem postihnout úroveň vědomostí a dovedností na začátku výuky určitého celku. Průběžný test poskytuje učiteli i žákům zpětnou vazbu k optimalizaci výuky. Učitel ověřuje, jak žáci učivo chápou a jak si ho osvojují. Výstupní test slouží k hodnocení žáků po ukončení výuky daného celku nebo na konci výukového období.

Monotematické testy testují jedno téma učební látky a **polytematické testují** učivo několika tematických celků.

Testy objektivně a **subjektivně skórovatelné** se rozlišují podle toho, je-li možné jednoznačně rozhodnout, zda je řešení či postup správný nebo chybný.

1.4. Druhy testových úloh

Každý test se skládá z jednotlivých testových úloh. Jednotlivé testové úlohy a jejich sestava určují kvalitu celého testu. Chráska (2007, s. 188) rozděluje testové úlohy dle způsobu, kterým testovaná osoba úlohu řeší, na otevřené a uzavřené úlohy.

1.4.1. Otevřené testové úlohy

Otevřené testové úlohy vyžadují, aby testovaný sám vytvořil nějakou odpověď. Otevřené testové úlohy můžeme dle rozsahu dále dělit na **úlohy široké** a **úlohy se stručnou odpovědí**.

V **širokých úlohách** se od žáka očekává rozsáhlejší odpověď (minimálně půl stránky). Tento typ úloh má svou přednost v tom, že dotazovaný má možnost prokázat své znalosti v širších souvislostech, dále může prokázat i schopnost aplikace obecných poznatků atd. Nevýhodou je jejich zpracování a hodnocení. (Chráska, 2007, s. 188)

Úlohy se stručnou odpovědí vyžadují stručnou odpověď, např. vzorec, výčet několika prvků, číslo atd. Úlohy se stručnou odpovědí mohou být doplňovací (např. Kužel se skládá z pláště a …) a produkční (např. Co je jednotkou objemu?). Mezi výhody patří, že se snadno navrhují. Neumožňují testovaným osobám tak snadno uhodnout správnou odpověď bez příslušných znalostí. (Chráska, 2007, s. 189)

1.4.2. Uzavřené testové úlohy

Uzavřené testové úlohy jsou takové, kde žák vybírá z možností, či možnosti musí seřadit. Dělíme je na dichotomické, úlohy s výběrem odpovědí, přiřazovací a uspořádací úlohy.

U **dichotomických úloh** má žák na výběr ze dvou možných odpovědí. Výhodou je, že se snadno vypracovávají a opravují. Nedostatkem je velká pravděpodobnost uhodnutí správné odpovědi i bez příslušných znalostí.

Úlohy s výběrem odpovědí jsou takové, kde žák vybírá jednu nebo více správných odpovědí či nesprávné odpovědi.

Přiřazovací úlohy obsahují dvě množiny pojmů a instrukce. Žák má za úkol správně přiřadit pojmy z jedné množiny k pojmům z druhé množiny. Výhodnější pro učitele je ponechat v jedné množině více položek, protože žák nemůže při znalosti pouze části odpovědí odhadnout pravděpodobné variace ze zbylých možností. (Chráska, 2007, s. 193)

V **uspořádacích úlohách** se od žáka vyžaduje, aby uspořádal prvky z množiny pojmů jedné třídy dle nějakého kritéria. (Chráska, 2007, s. 194)

1.5. Jak tvořit test?

Každý učitel někdy potřebuje vytvořit zadání didaktických testů. Tvorbu didaktického testu lze dle Chrásky (1999, s. 20) rozdělit do několika základních etap:

- plánování testu
- konstrukce testu
- ověřování a optimalizace testu

První etapou tvorby testu je **plánování testu**. Učitel by si měl nejprve ujasnit, co je cílem testu, pro koho bude test určen a co bude obsahem testu. Pro úroveň osvojení poznatků je vhodné použít taxonomii výukových cílů (např. dle Blooma viz příloha 1) nebo si učitel může vytvořit tzv. specifikační tabulku, která vymezí, jaká témata bude test zahrnovat a v jakém rozsahu (strukturu učiva k testování, určení počtu úloh a také úroveň osvojení poznatků, které by měly úlohy ověřovat).

Další etapou je **konstrukce testu**. Učitel má už rozmyšlenou formu a rozsah testu. Nyní bude muset vybrat nebo vymyslet otázky, úlohy nebo úkoly a vytvořit prototyp úloh. K tomuto prototypu by se měl učitel po nějaké době vrátit nebo nechat navržené úlohy posoudit další kompetentní osobou. Dále by měl určit časové trvání testu. (Chráska považuje ideální dobu takovou, kdy 80 – 90 % žáků stihne projít celý test).

Třetí a poslední etapou je **ověření a optimalizace testu**. Test by měl být ověřen na vzorku žáků. Dle výsledků testování se zanalyzují vlastnosti jednotlivých testových úloh, ale i didaktického testu jako celku. Jedná se hlavně o obtížnost a citlivost (schopnost testu rozlišovat mezi žáky s různou úrovní skutečných znalostí a dovedností, viz kapitola 1.6.4) úloh. Vedle posuzování obtížnosti a citlivosti úloh se provede v rámci analýzy analýza neformálních odpovědí. Dalším krokem je test upravit a vytvořit definitivní podobu testu. Po zadání a vypracování testu musí učitel test vyhodnotit. Klasifikuje (hodnotí) žáky a společně rozeberou úlohy v testu.

1.6. Vlastnosti didaktického testu

V této podkapitole se zaměřím na vlastnosti, které by měl kvalitní didaktický test obsahovat. Většina autorů se shoduje, že mezi hlavní vlastnosti můžeme zařadit následující:

- objektivita,
- validita (platnost),
- reliabilita (spolehlivost),
- citlivost.

1.6.1. Objektivita

Objektivita je klíčová, avšak vnitřně komplikovaná. Tím myslím, že zůstat objektivní je v některých případech velice náročné. V souvislosti s testováním objektivitu chápeme hlavně jako nepřítomnost výrazných subjektivních vlivů během testování. Správně konstruovaný didaktický test umožňuje poskytnout objektivní, a tedy relativně srovnatelné výsledky, které závisí jenom na znalostech a dovednostech jednotlivých žáků. Žákům jsou v testu předloženy stejné úlohy se stejným časovým limitem pro řešení a s předem určeným klíčem správných řešení. Žáci tak mají stejné výchozí podmínky, čímž je současně umožněno srovnávat výsledky jednotlivých žáků (tříd, škol) mezi sebou.

Objektivita a srovnatelnost nejsou samozřejmou vlastností každého písemného didaktického testu, ale jenom testu kvalitního a konstrukčně bezchybného. K zajištění objektivity přispívá jednoznačná formulace úloh testu, shodné podmínky při jeho zadávání a především přesná a pro všechny stejná pravidla hodnocení žákovských odpovědí. (Schindler, 2006, s. 11)

1.6.2. Validita

Měří test to, co měřit má? Slouží k tomu účelu, za jakým byl zkonstruován? Tyto dvě otázky se ptají na jednu a tu samou věc – na validitu testu.

Validita představuje shodu mezi výsledky testu a účelem, pro který byl test vytvářen. Jednoduše řečeno: výsledky testu nám mnoho neřeknou, pokud si nejsme jisti, co skutečně daný test měřil a co můžeme na základě jeho výsledků o žákovi zjistit. (Schindler, 2006, s. 12)

Chráska (2007, s. 38) rozlišuje validitu podle toho, k čemu se vztahuje na:

- validitu obsahovou – zda test měří skutečně to, co autoři testu chtěli zkoumat
- validitu souběžnou – do jaké míry se měření shoduje s jiným měřením stejného objektu
- validitu predikční – do jaké míry provedené měření vypovídá o budoucím vývoji objektu
- validitu konstruktovou – nakolik daná technika měří skutečně určitou reálnou charakteristiku a do jaké míry měří určitý pedagogický či psychologický konstrukt

1.6.3. Reliabilita

Spolehlivost a přesnost jsou dva pojmy, které dle mého názoru nejlépe vystihují podstatu reliability. Aby měření bylo reliabilní, je potřeba, aby při opakování za stejných podmínek poskytovalo zhruba stejné výsledky. Tento aspekt reliability je možné označit jako spolehlivost měření. Za přesné měření považujeme takové měření, při kterém se dopouštíme pouze malého počtu chyb, a tyto chyby nejsou příliš velké. Oba aspekty, spolehlivost a přesnost, zahrnujeme pod společný pojem reliabilita měření. Dostatečně velká reliabilita je nutnou podmínkou dobré validity měření, ale vysoká reliabilita ještě nezaručuje dobrou validitu, protože když bude test spolehlivý a přesný, nemusí vždy zkoušet to, co skutečně má. (Chráska, 2007, s. 198)

Reliabilita měření se vyjadřuje koeficientem reliability. Koeficient reliability může nabývat hodnot od 0 do 1, přičemž platí, že 0 vyjadřuje špatnou reliabilitu (nespolehlivost, nepřesnost) a 1 vyjadřuje dobrou reliabilitu (maximální spolehlivost, přesnost). Koeficient reliability je možné určovat několika způsoby, např: (Chráska, 2007, s. 198)

- metoda půlení – dá se použít jak pro testy úrovně, tak i pro testy rychlosti. Jedinou podmínkou pro použití je, že didaktický test obsahuje sudý počet úloh a jednotlivé úlohy jsou řazeny podle vzrůstající obtížnosti. Celý test se rozdělí na dvě poloviny. Jednu polovinu tvoří úlohy s lichým pořadovým číslem a druhou poloviny úlohy se sudým pořadovým číslem. Samotný výpočet se provádí pomocí Spearmanova-Brownova vzorce $r_{\mathrm{SB}^3} = \frac{2r_p}{1+r_p}$, kde r_{SB} je koeficient reliability a r_p je koeficient korelace mezi výsledky žáků v obou polovinách didaktického testu.
- výpočet koeficientu reliability pomocí Kuderova-Richardsonova vzorce – tento model je vhodný pro didaktické testy úrovně, které jsou složeny z obsahově homogenních úloh Kuderovův-Richardsonovův vzorec $r_{\mathrm{KR}^4} = \frac{k}{k-1}\left(1 - \frac{\sum pq}{s^2}\right)$, kde k je počet úloh v testu, p je podíl žáků ve vzorku, kteří řešili danou úlohu v testu správně, $q = 1 - p$ a s je směrodatná odchylka pro celkové výsledky žáků v testu.

1.6.4. Citlivost

Citlivost vypovídá o schopnosti testu rozlišovat mezi žáky s různou úrovní skutečných znalostí a dovedností. Je-li test citlivý, měly by být výsledky žáků rozloženy po celé bodové škále. Pokud například všichni žáci dosáhnou v testu skvělého výsledku nebo všichni špatného, tento test není citlivý – nerozlišil žáky mezi sebou. Optimální míra citlivosti se liší v závislosti na účelu testu. (Schindler, 2006, s. 18)

[3] SB - Spearmanův-Brownův vzorec
[4] KR - Kuderovův-Richardsonův vzorec

2. Hodnocení, školní hodnocení

2.1. Hodnocení obecně

Hodnocení je součástí jakékoliv lidské činnosti. Dle Koláře a Šikulové (2009, s. 10) má lidská činnost několik etap. Na začátku stojí vždy nějaká potřeba, přání nebo představa, které vedou k formulaci cílů. Následující etapou je uvědomění si vnějších podmínek a vnitřních podmínek, které vedou k sestavení plánu činností a výběru nejvhodnějších prostředků (pomůcky, nástroje, metody práce či určení posloupnosti jednotlivých kroků). Další etapou je uskutečnění stanoveného plánu, čili realizace. Poslední etapou je vyhodnocení, její hlavní složkou je právě hodnocení.

Člověk se ve svém životě vlastně pořád rozhoduje, tedy i neustále hodnotí a nejen svá rozhodnutí a svou činnost, ale i rozhodnutí a činnosti ostatních. Mezi lidské činnosti patří činnost výchovně vzdělávací, tudíž je hodnocení bezprostředně součástí této činnosti. Jde o hodnocení nejen výsledků, ale i samostatného procesu výchovy. (Kolář, 2009, s. 13)

Jestliže bereme výchovu jako systém, můžeme každý hodnotící akt formulovat jako aktivitu, operaci a činnost, která má cíl, děje se za zcela určitých podmínek, realizuje se určitými prostředky a vede k určitému výsledku. (Kolář, 2009, s. 14)

Cílem může být např. ovlivnit nějakou kvalitu osobnosti žáka – motivace, regulace jeho učební činnosti, vyjádřit uznání, poskytnout zpětnou vazbu o zvládnutí úkolu a podobně. V tomto případě je podstatnou podmínkou vztah učitele a žáka, autorita učitele, pozice žáka ve třídě. Prostředků je několik, např. udělení známky, bodů, slovní hodnocení, srovnání žáků mezi sebou, vyjádření výsledku procenty, a výsledkem je reakce žáka na hodnocení. (Kolář, 2009, s. 14)

Žák by se měl naučit nikoliv jen pozitivně reagovat na hodnocení, ale měl by se naučit i sebehodnocení.

2.2. Vymezení a specifika školního hodnocení

Hodnocení žáků – jejich výkonu, činností, chování – je jeden ze základních činností učitele. Tato činnost je velmi důležitá i pro žáky a rodiče či školu. Hodnocení je jeden ze základních prostředků, jak může učitel řídit, usměrňovat a ovlivňovat činnost žáka.

Existuje několik definic pojmu „školního hodnocení". Např. Slavík (1999, s. 23, v Kolář, 2009, s. 17) rozumí školním hodnocením *„všechny hodnotící procesy a jejich projevy, které bezprostředně ovlivňují školní výuku nebo o ní vypovídají."* Skalková (1971, s. 95, v Kolář, 2009, s. 17) chápe hodnocení jako *„zaujímání a vyjadřování kladného nebo záporného stanoviska k různým činnostem výkonům žáků při vyučování, které může mít v praxi nejrůznější formy: od souhlasného nebo nesouhlasného pokývnutí hlavou, přísného pohledu, tónu hlasu, kladné či negativní poznámky, zájmu o osobnost žáka, pochvaly či napomenutí, odměny či trestu až po známku, případně podrobnější analýzu výkonu včetně závěrečného hodnotícího soudu aj."*

Školní hodnocení má několik vlastností. V první řadě je to systematické a nenáhodné hodnocení. Systematičnost školního hodnocení je dána tím, že učitel při vyučování pracuje s tzv. vzdělávacími standardy. Dále je určena předmětem hodnocení a časem. Hodnotíme nejen výsledky, ale i průběh učení. Žáci se přes hodnocení učí učit. Dalším důležitým specifikem je nezbytnost hodnocení ve škole. Toto specifikum má svá rizika, protože někteří žáci se učí pouze kvůli dobré známce, na druhou stranu nehodnocení je silně demotivační. Další specifičností školního vzdělávání je „utváření psychických stránek osobnosti" žáka. Hodnocení ovlivňuje žákovo postavení ve skupině, zaměření, motivaci, sebehodnocení a jeho sebevědomí. (Kolář, 2009, s. 18)

Hodnocení je významné, neboť může stimulovat žáka v učebním procesu, ale může být také demotivujícím, destabilizačním prvkem či zdrojem konfliktů. Hodnocení pomáhá žákům ukazovat očekávané výkony a chování, pozitivní přijetí v sociální skupině podporuje žákovu potřebu někam patřit. Prostřednictvím hodnocení žáků učitel hodnotí sám sebe, hodnotí tím kvalitu své pedagogické práce. (Kolář, 2009, s. 22)

Hodnocení záleží velkou měrou na učitelích, na jejich profesních kompetencích, pedagogických přesvědčeních, přístupu a zkušenostech. Hodnocení má i své riziko a to vysokou míru subjektivity při některých formách hodnocení. Hodnocení také ovlivňuje vztah mezi učitelem a žákem a tento vztah se promítá do hodnocení. Hodnocení by mělo být co nejvíce objektivní a pozitivně naladěné. Učitel by se neměl nechat ovlivňovat předsudky, které má o žákovi, a očekáváními, které má vzhledem k žákovi. (Kolář, 2009, s. 22)

2.3. Hodnocení a cíle, zpětná vazba

Hodnocení žáků je mimo jiné spojováno s cíli výuky. Když si je učitel vědom cílů výuky, ví, čeho mají žáci dosáhnout a co jsou schopni dělat, tudíž může určit kritéria hodnocení. Cíle výuky jsou formulovány ve vzdělávacích programech a také rozpracovány v jednotlivých předmětech a jednotlivých tématech ke konkrétním jednotlivým cílům. V souvislosti s cíli se velmi často používá tzv. Bloomova taxonomie cílů (viz příloha 1), kde jsou rozpracovány cíle do oblastí znalostí, dovedností a postojů. (Kolář, 2009, s. 27)

Žáci by měli vždy vědět, co se bude hodnotit, jaký je tedy k dané konkrétní látce formulován cíl. (Kolář, 2009, s. 30)

Žák přes hodnocení získává zpětnou vazbu o svém výkonu. Existují různé formy zpětné vazby. Může být průběžná nebo souhrnná, podrobná nebo rámcová, okamžitá nebo odložená. Na začátku učení u mladších a starších žáků je nejvhodnější zpětná vazba průběžná, dostatečně podrobná a okamžitá. Žák by se měl naučit, jak se zpětnou vazbou pracovat tak, aby ji mohl využívat správně. Poskytování a získávání zpětné vazby má pozitivní vliv nejen na kognitivní procesy u jednotlivých žáků, ale i na motivaci a přístup k učení a celkovou atmosféru ve třídě. (Novotná, 2011)

2.4. Typy hodnocení

Zpětná vazba souvisí s různými typy hodnocení. V odborné literatuře se můžeme setkat s různými typy hodnocení, např. Kosová (1998, v Kolář, 2009, s. 32) „*rozlišuje podle zdroje hodnocení na hodnocení vnější, což je heteronomní, a vnitřní, a to je autonomní.*

- *Heteronomní hodnocení je hodnocení objektu ležícího mimo.*
- *Autonomní hodnocení je hodnocení, kdy je zdrojem objekt sám.“*

Dalším typem hodnocení je hodnocení podle vztahové normy. Zde rozlišujeme hodnocení sociálně normované a individuálně normované.

- Hodnocení sociálně normované užívá stejného měřítka pro všechny žáky, tím umožňuje učiteli srovnat jednotlivé výkony.
- Hodnocení individuálně normované umožňuje učiteli sledovat výkon jednoho žáka a porovnávat ho s jeho předchozími výkony. (Kolář, 2009, s. 32)

Mezi další typy můžeme zařadit např. hodnocení relativního výkonu, které porovnává výkon jednoho žáka s ostatními, hodnocení absolutního výkonu hodnotí, do jaké míry výkon odpovídá konkrétnímu popisu výkonu, formální hodnocení následuje po předchozím upozornění, neformální hodnocení se zakládá na pozorování výkonů během hodiny, průběžné hodnocení ukazuje dílčí zhodnocení úrovně znalostí, závěrečné hodnocení ukazuje konečnou úroveň znalostí. (Kolář, 2009, s. 33)

V posledních letech se rozvíjí alternativní možnosti hodnocení. Například dle Slavíka (1999, v Kolář, 2009, s. 34) autentické hodnocení zjišťuje znalosti a dovednosti v situacích blížících se k reálným situacím, klade větší důraz na úkoly pro praktický život. Jiní zastánci alternativního hodnocení volí např. portfoliové hodnocení, kde jsou žáci hodnoceni na základě jejich souborů produktů (výrobky, písemné práce, sešity …).

2.5. Funkce hodnocení

Hodnocení v životě člověka slouží k různým cílům neboli plní různé funkce. Podle Koláře a Šikulové (2009, s. 45) můžeme dělit funkce následovně:

- Motivační – napomáhá učiteli žáky motivovat k lepším pracovním výkonům, učit se, k úspěchům atd., ale je potřeba dát si pozor, aby nedošlo k demotivaci. Motivace vychází z lidských potřeb zejména z potřeb sociální povahy, tedy dosáhnout úspěchu a vyhnout se neúspěchu.
- Informativní – pomocí tohoto hodnocení předává učitel žákům či rodičům informace o jejich výkonech, úsilí a aktivitě ve škole včetně chování.
- Regulativní – umožňuje učiteli bezprostředně regulovat učební činnost žáků a jejich kvalitu práce.
- Výchovná – napomáhá k formování pozitivní osobnosti žáků např. odpovědnost, svědomitost, sebevědomí …

- Prognostická – dlouhodobým hodnocením žáka docílíme důkladného poznání jeho možností a na základě prognostické funkce pak můžeme předpovědět jeho budoucí studijní perspektivu.
- Diferenciační – umožňuje dělit žáky do různých skupin podle výkonnosti, učebního stylu či zájmů. Učitel by se měl vyhnout nevhodné diferenciaci žáků, tzv. „škatulkování“, „nálepkování“ žáků (Je to typický trojkař. Z něj nikdy nebude dobrý chemik. atd).

Školní hodnocení plní několik úkolů, dle Kyriacouové (1996, s. 121)

- poskytování zpětné vazby pro učitele,
- poskytování zpětné vazby pro žáky,
- motivace,
- podklady pro vedení záznamů o prospěchu žáka,
- poskytování dokladů o momentálním prospěchu a dosažené úrovni žáka,
- posouzení připravenosti žáka pro další učení.

2.6. Fáze hodnotícího procesu

Proces hodnocení se dá rozdělit do několika etap, ve kterých musí učitel a žák vyvíjet různou aktivitu. V odborné literatuře se můžeme setkat s několika rozděleními do etap hodnocení. Například Kalhous a Obst (2002, s. 404, v Kolář, 2009, s. 59):

1. *„Rozhodnutí o cíli hodnocení (jaká funkce v něm bude převažovat) a v souvislosti s tím o vhodné metodě hodnocení. Jde o učitelův záměr, který do konkrétního hodnocení vkládá.“*
2. *„Zjišťování informací o skutečném stavu (o studentovi, o jeho výkonu) čili používání metod zjišťování stavu a úrovně znalostí, dovedností, osvojených situacích atd.“*
3. *„Formulování hodnotícího závěru (stanovení známky).“*

Kolář a Šikulová (2009, s. 58), kteří rozdělují hodnotící proces do sedmi fází a současně popisují, co v každé fázi dělá učitel (u) a žák (ž). Toto rozdělení na etapy se mi líbí více, protože rozděluje aktivitu učitele a žáka do jednotlivých kroků a pomáhá tak pochopit, čím se žák a učitel v jednotlivých fázích zabývá.

1. *„zadání úlohy (u) + pochopení, přijetí úlohy (ž)“*

   Volba a způsob zadání úlohy vyplývají z konkrétního učiva a cílů, kterých chce učitel dosáhnout. Dále se zde promítá vztah učitele a žáka či žáků. Každý žák má navíc odlišný přístup k různým formám zadávání úloh a i k testování. Různé přístupy učitelů i žáků se projevují během celého průběhu zkoušení.

   Žák se musí snažit pochopit, přijmout a řešit úlohu.

2. *„expozice výkonu (ž) + průběžná analýza (u)“*

   V této funkci jde hlavně o aktivitu žáka. Žák řeší úlohu a učitel během individuálního zkoušení začíná analyzovat žákovo řešení, postup. Učitel může předpovídat žákovy další kroky řešení a tím ho chránit před uděláním chyb. Učitel může kdykoliv zasáhnout do žákovy činnosti, ale měl by to dělat vždy taktně. Učitel by neměl nikdy upozorňovat jenom na chyby, ale měl by oceňovat správné dílčí postupy, originální řešení, vyřešení problémů, překonaní překážek atd.

3. *„ukončení výkonu (ž) + očekávání (ž) + rychlé zpětné promítání výkonu (u)“*

   Žák již ukončil řešení své úlohy a očekává hodnocení. Učitel opět dělá důkladnou analýzu výkonu a porovnává žákův výkon s jeho předchozími výkony a výkony jeho spolužáků. Během běžné hodiny má učitel na analýzu málo času. Žák během tohoto času provádí sebehodnocení, svůj výkon může porovnávat s kritérii, svých předchozích výkonů či s výkony spolužáků. Čekání na hodnocení při ústním zkoušení může být pro žáka velmi stresující moment.

4. *„závěrečná analýza výkonu (u) + rozhodnutí (u)“*

   Učitel se může zeptat na názor o výkonu spolužáka ostatních žáků či žáka samotného. Ovšem názory spolužáků jsou velmi často ovlivněny postavením žáka ve třídě. Učitel se rozhodne.

5. *„vynesení posudku o výkonu (u) + přijetí nebo nepřijetí posudku (ž)“*

   V této fázi učitel formuluje posudek o výkonu žáka. Posudek by měl mít vždy jednoznačný charakter a ústní hodnocení by mělo obsahovat i odůvodnění. Posudek by měl žáka někam směřovat a vyjadřovat naději. Žák si všímá nejen obsahové, ale i formální stránky hodnocení

   Přijetí hodnocení žákem je základem k jeho budoucí přeměně v sebehodnocení. Je ovlivněno také řadou vnitřních a vnějších okolností či podmínek. Mezi vnitřní podmínky se dá zahrnout aspirace žáka, jeho zájem, postoj žáka k předmětu, úrovní sebehodnocení a myšlení. Vnějšími podmínkami jsou například předmět hodnocení, kdo hodnotil, jak bylo hodnocení sděleno. Přijetí hodnocení se týká také toho, zda žák vidí hodnocení jako spravedlivé či nikoli.

6. *„uvědomění si možných důsledků daného posudku (u)“*

   Učitel by si měl uvědomovat existující důsledky svého hodnocení na žáka a jeho budoucí činnost.

7. *„důsledky v chování a učebním jednání žáka (ž)“*

   Důležitou roli hrají příčiny, které připisuje žáka ke svým úspěchům či neúspěchům ve škole. Tyto příčiny můžeme rozdělit na vnitřní a vnější, stálé a dočasné.

2.7. Formy hodnocení žáků

„Forma, kterou je hodnocení vyjádřeno, je vnějším projevem probíhajícího hodnotícího procesu. Je to způsob, jakým je vyjádřen hodnotící posudek. Jakou formu hodnocení použijeme, bude záležet na konkrétní situaci ve vyučování, protože nám půjde o to, aby právě v této situaci bylo hodnocení pedagogicky nejúčinnější. Ani jedna forma hodnocení sama o sobě není špatná. Všechny formy hodnocení jsou funkční, ale tato jejich „funkčnost“ bude závislá na určitém pedagogickém záměru a pedagogické situaci.“ (Kolář, 2009, s. 77)

Učitel má k hodnocení na výběr řadu různých forem, např. nonverbální hodnocení (gesta, haptika), jednoduchá verbální hodnocení (správně, chyba), několika větné vyjádření (Výborně, dnes si zvládl vypočítat vše. Dokonce ani v posledním jsi neudělal chybu a ten byl nejobtížnější.), udělení známky či oznámení počtu bodů, slovní hodnocení.

2.7.1. Známkování či slovní hodnocení?

Diskuze týkající se známkování a slovního hodnocení jsou různorodé. Někteří odborníci se domnívají, že se tyto dva atributy vylučují, avšak já osobně souhlasím, z vlastní zkušenosti a z informací od učitelů z praxe, s Kolářem a Šikulovou (2009, s. 79), kteří si myslí, že známkování a slovní hodnocení by se mělo navzájem doplňovat.

Známkování

V dnešní době někteří odborníci (např. Miková, Stang, 2008) považují známkování za demotivující a způsobující stres a frustraci. Tvrdí, že by se známkování ve školách mělo přestat používat.

S tímto přístupem nesouhlasím, ale je pravdou, že známkovací škála je velmi úzká, i když se používají plusy a mínusy, a známky nemají vysokou informační hodnotu.

Známky nám ukazují, jakého výkonu žák dosáhl, ale už se nedozvíme o jeho snaze, zlepšení či zhoršení. Je důležité, aby známkování bylo vždy pokud možno postaveno na počtu bodů, neboť v opačném případě se stává subjektivním např. u ústního zkoušení. Na druhé straně jsou známky významným symbolem úspěchu a můžou motivovat k lepším výkonům obzvlášť u žáků, kteří se rádi řídí dle známek. Známky zjednodušují vyjádření hodnocení a umožňují porovnat výkony i chování a jako matematický symbol i statistické zpracování. (Kolář, 2009, s. 84)

Slovní hodnocení

Slovní hodnocení je vyjádření nejen hodnocení žákova výkonu, ale i ostatních faktorů, např. chování, snahy, postojů, zlepšení a zhoršení celkového prospěchu. Oproti známkám má mnohem větší vypovídací schopnost. (Kolář, 2009, s. 88)

Dle mého názoru by proto známky měly být doplněny o slovní hodnocení.

Největší výhodou slovního hodnocení je, že žáka nestresuje a reguluje jeho činnost. Díky němu přistupujeme k žákům jako k individualitám. Nevýhody plynoucí ze slovního hodnocení jsou hlavně pro učitele, a to časová náročnost, pracnost a obtížnost zpracování obsahu. Učitel musí umět dobře diagnostikovat žáky, také se musí vyvarovat klišé a převyprávění známek (1 – výborně, 3 – dobře) a musí své hodnocení co nejvíce konkretizovat, aby žákům předal, co nejpřesnější informace. (Kolář, 2009, s. 88)

Kolář a Šikulová (2009, s. 92) doporučují formulaci slovního hodnocení následovně:

- uvést úspěchy a nedostatky, neúspěchy žáka,
- navrhnout cestu ke zlepšení,
- používat popisný jazyk,

- nepoužívat posuzující jazyk,
- používat jednoznačné formulace pro dostatečnou informovanost,
- hodnotit chování, činnost, výkon, práci, ale nikoli osobnost žáka,
- snažit se hodnotit pozitivně a vyhnout se ironii a sarkasmu.

2.8. Pohled na hodnocení ze strany učitele

Hodnocení je pro učitele velmi obtížný úkol, protože se musí snažit být co nejvíce objektivní a musí zhodnotit řadů faktorů. Mnoho autorů doporučuje používat průběžné hodnocení a opatrně zacházet s hodnocením, kdy se výkon žáků porovnává s jinými. Kyriacouová (1996, s. 133) radí hodnocení více individualizovat, zapojit samotné žáky do hodnocení jako partnery a hodnotit tak širší okruh výkonu.

2.8.1. Objekt hodnocení

Schimunek (1994, s. 13) uvádí, co by měl učitel při hodnocení, hlavně u slovního, zohlednit. Zohlednit by měl kognitivní schopnosti při učení (pozorování, chápání, kombinování, jazykové vyjádření…). Dále by měl vzít v úvahu připravenost k učení, postoj ke škole, individuální a sociální chování, tělesné a zdravotní zvláštnosti.

2.8.2. Pravidla a požadavky k hodnocení

Schimunek (1994, s. 27) učitelům radí, jak nejefektněji poznat své žáky a jak je hodnotit. Učitelům, kteří hodnotí hlavně slovně, radí, aby si vedli pedagogický deník. V deníku si učitelé vedou o každém žákovi nejen známky, ale i záznamy o jeho činnosti, zvládnutí učiva atd. Učitelé by se měli snažit pozorovat žáky nejen při učebních činnostech, ale i při hrách, přestávkách a mimoškolních aktivitách. Košťálová, Miková a Stang (2012, s. 134) doporučují při pozorování žáků používání audionahrávek a videonahrávek.

Pravidla hodnocení dle Schimunka (1994, s. 34):

- *„hodnoťte různými způsoby a vynalézavě, vyhýbejte se rutině“*
- *„umožněte žákům, aby byli úspěšný“*
- *„vyvarujte se ironii a sarkasmu“*
- *„hodnoťte dílo, ne osobu“*
- *„chvalte často a veřejně, kárejte osobně“*

Žáci by se měli umět naučit přijímat hodnocení a naučit se hodnotit sebe, ostatní i svět kolem sebe. V Bloomově taxonomii cílů ve vyučování je jako nejkomplexnější a nejvyšší hladina právě „ hodnocení“.

2.8.3. Chybné a správné hodnocení

V kontextu s objektivním a subjektivním hodnocením se dostáváme k problematice tzv. „správného“ hodnocení a „chybného“ hodnocení. Kolář a Šikulová (2009, s. 101) považují za *„ „správné“ hodnocení takové, které pomáhá žákovi“* a za *„ „chybné“ hodnocení takové, které žáka poškozuje“*. Dále uvádějí skupiny chyb, kterých se může učitel dopouštět.

1. *„chyby metodologického charakteru“,*
2. *„chyby související se specifickými vlastnostmi učitelovy osobnosti“,*
3. *„chyby vyplývající z percepčně postojové orientace učitele.“*

Schimunek (1994, s. 25) uvádí následující tendence, které se u různých učitelů objevují, v důsledku toho, že hodnotí různými způsoby podle své osobnosti. Tato tendence se projevuje ke všem žákům nebo jen k některým:

- *„sklon k mírnosti“*
- *„sklon k přísnosti“*
- *„extrémní nesmělost“*
- *„sklon k vyhraněným soudům, černobíle vidění“*
- *„sklon podléhat očekávání a neuvědomovat si chyby v sociální percepci“*

Kolář a Šikulová (2009, s. 104) přidávají ještě:

- *„sklon promítat do hodnocení svůj aktuální psychický stav“*
- *„neschopnost empatie“*

Dále mají učitelé tendenci žáky tzv. schematicky typizovat (řadit žáky do několika skupin). Umístění žáka do nějaké skupiny ovlivní učitelovo přistupování k němu. Kolář a Šikulová (2009, s. 105) udávají pět skupin:

1. *„žáci výborní, spolupracující s učitelem"*
2. *„žáci, které učitel považuje za schopné, nadané, ale v určitém směru obtížné"* (např. nespolehlivé, neukázněné, nepracující systematicky)
3. *„žáci hodní, vděční učiteli za každý projev sympatie a pomoci, ale považováni za málo schopné, špatně prospívající"*
4. *„žáci vyslovené problémoví, konfliktní, učitel se domnívá, že do jeho třídy nepatří, že představují zlo pro třídu¨"*
5. *„žáci, které lze označit za neurčitý málo diferencovaný soubor"* – ničím se nevyznačují, průměrní

Další problém v hodnocení žáka souvisí s kauzální atribucí, tj. *„v připisování příčin chování a jednání žáka, jeho úspěchů či neúspěchů a v interpretaci těchto příčin učitelem samotným"*. (Kolář, 2009, s. 106)

Hejný a Kuřina (2009, s. 175) se zabývali také interakcí učitel – žák a chybami v interakci. Popisují dvě přístupové strategie učitele, a to strategii dialogicky přístupovou a strategii postojovou.

„Dialogická přístupová strategie učitele je charakterizována permanentním dialogem mezi učitelem a žáky a demokratickým klimatem." Jednotlivé fáze interakce mají tyto rysy (Hejný, 2009, s. 176, 177):

1. vnímavost na impulzy, které ovlivňují žáka – učitel přiměřeně a ve správný čas reaguje na činnost a stav žáka
2. komplexní monitorování – učitel se snaží o co nejlepší porozumění současné situaci
3. alternativní zvažování – učitel se při zvažování své reakce zamýšlí nad tím, co bude pro žáka nejlepší
4. odpovědné rozhodnutí
5. demokratické jednání – učitel nezneužívá svých mocenských prostředků, ale využívá svojí přirozenou autoritu

„Postojová přístupová strategie učitele je protipólem předchozí strategie. Je charakterizována „pevným postojem" učitele vůči žákům a autoritativním klimatem" (Hejný, 2009, s. 177) Postojová strategie má tyto fáze:

1. vnímavost, hlavně k impulzům, které dle učitele narušují průběh vyučování
2. dotykové monitorování – učitel diagnostikuje příčiny žákova chování dle žákovy „nálepky“ (např. šťoura)
3. fáze zvažování neexistuje
4. tezovité rozhodování – učitel má k danému typu žáka a ke každé situace svojí tezi, která vysvětluje příčiny (např. slabý žák napíše výborně test = opisoval)
5. mocenská realizace – učitel používá svojí institucionální moc

2.8.4. Chyby a práce s nimi

Chyby přirozeně patří k učení i k dalším lidským činnostem. Dokládají to i různá známá rčení „chybami se člověk učí“, „kdo nic nedělá, nic nezkazí“. Ale ve škole se na to někdy zapomíná. Hlavně neudělat chybu – je úzkostná představa mnoha dětí školou povinných.

Podle Hejného a Kuřiny (2009, s. 184) by měl učitel chybu chápat jako diagnostický nástroj a měl by se zamýšlet nad tím, proč došlo k chybě. Rozdělují chyby do čtyř tříd, poslední tři třídy považují za zdánlivé chyby:

1. třída – „chyby, které vycházejí z formálních znalostí žáka“

2. třída – *„interpretační nesoulad“* – žák pochopí pojem, situaci, úlohu nesprávně, nesprávně interpretuje

3. třída – *„neukončený vývoj“* – žák chápe problematiku správně, ale pouze jen částečně

4. třída – *„komunikace“* – žák např. správně uvažuje, avšak své myšlenky vyjádří nebo zapíše nesprávně

3. Slovní úlohy

3.1. Vymezení pojmu slovní úloha

Najít v literatuře přesnou a vyčerpávající definici slovní úlohy se mi nepodařilo, protože různí autoři je vymezují různě a dokonce v některých publikacích není vymezení slovní úlohy vůbec. Jak můžeme vidět na následujících příkladech, v určitých charakteristikách se odborníci shodují a v některých se zase odlišují.

Charakteristika slovní úlohy podle Františka Kuřiny:

„Slovní úlohy, v nichž je obvykle popsána určitá reálná situace (např. s ekonomickou, přírodní, fyzikální, společenskou či jinou tématikou) a úkolem řešitele je určit odpovědi na položené otázky.“ (Kuřina, 1990, s. 61)

Charakteristika slovní úlohy podle Jana Vyšína:

„Slovními úlohami bývají zpravidla nazývány úlohy aritmetické nebo algebraické, formulované slovy, nikoli matematickými symboly, nebo úlohy z praxe, jejichž řešení vyžaduje rozřešen aritmetické nebo algebraické úlohy.“ (Vyšín, 1962, s. 104)

Charakteristika slovní úlohy podle Jiřího Divíška:

„Slovní úlohou rozumíme obvykle úlohu z praxe, ve které je popsána určitá reálná situace, která vyúsťuje v problém. Předložený problém je možné řešit buď v realitě, nebo matematicky.“ (Divíšek, 1989, s. 123)

Charakteristika slovní úlohy podle Gustava Knížete:

„Slovní úlohou nazýváme požadavek určit číselnou hodnotu nějakého souboru věcí nebo veličiny ze známých číselných hodnot jiných souborů nebo veličin, které jsou určitým způsobem závislé mezi sebou a hodnotou hledanou.“ (Kníže, 1966, s. 5)

Jak už jsem předeslala v prvním odstavci, můžeme na těchto čtyřech příkladech vidět shodující se momenty, a proto chci raději upozornit na odlišnosti. Například Jan Vyšín tvrdí, že slovní úloha je formulována slovy a ne matematickými symboly. Kdežto Gustav Kníže je opačného názoru. Mezi slovní úlohy zařazuje i ty s matematickými znaky. Dále pak Jan Vyšín uvádí, že zpravidla slovní úlohy jsou aritmetické nebo algebraické. Tudíž se dá předpokládat, že geometrické slovní úlohy by do této definice nezařadil. (Dlouhá, 2012, s. 24)

„V této práci rozumím slovními úlohami úlohy formulované slovy, vycházející z praxe a popisující reálné situace, objekty či jevy. Tyto úlohy vyúsťují v problém, který je potřeba identifikovat a vyřešit.“ (Dlouhá, 2012, s. 24)

3.2. Historie slovních úloh

Už ve starověku se objevovaly první slovní úlohy, tyto úlohy vznikaly z nutnosti řešit problémy reálného života např. vyměřovat pole, vybírat daně apod. Starověké, středověké i novověké úlohy mají bohatou nabídku. (Novotná, 2000, s. 11)

Příklady některých slovních úloh z historie:

Období starého Egypta

Matematické úlohy zde vznikaly z potřeby provádění výpočtů při stavebních pracích, při vybírání daní, rozdělování majetku, při vyměřování polí nebo výpočtů vodních nádrží a sýpek. Úlohy se třídily podle metod řešení, nikoliv podle témat, kde se řešení podávalo bez jakéhokoliv vysvětlení, maximálně byla provedena zkouška nalezeného výsledku. (Kadlčíková, 2010, s 26)

Příklad úlohy ze starého Egypta:

Pastýře, který hnal 70 býků, se zeptali: „Jak velkou část svého početného stáda býků ženeš? “ Odpověděl: „Ženu dvě třetiny z třetiny dobytka.“ Kolik býků bylo v celém stádu? (Novotná, 2000, s. 11)

Období Mezopotámie

„V této době se při řešení úloh využívaly matematické tabulky obsahující druhé mocniny, třetí mocniny a třetí odmocniny z čísel apod. Slovně se zapisovaly úkony sčítání a odčítání. „(Kadlčíková, 2010, s 26)

Příklad úlohy:

Kapitál v hodnotě 1 gur byl půjčen na úrok rovný jedné pětině ročně. Za jakou dobu se kapitál zdvojnásobí?

Období Helénistické země a Římského císařství

„V tomto období se narodilo mnoho významných osobností, které přispěly k rozvoji matematiky např. Eratosthenes z Kyreny, Archimédés nebo Diofantos z Alexandrie.“ (Kadlčíková, 2010, s 26)

Příklad úlohy z tohoto období:

Jeden umírající člověk si řekl: „Jestliže se mé ženě narodí syn, ať mu patří dvě třetiny jmění a zbytek ženě. Jestliže se narodí dcera, ať jí patří třetina a ženě dvě třetiny.“ Narodila se dvojčata – syn a dcera. Jak se mají rozdělit o jmění, aby se splnila závěť nebožtíka? (Novotná, 2000, s. 11)

Období Indie

„V tomto období byla objevená matematická díla psaná většinou ve verších a v sanskrtu, což je jazyk posvátných knih brahmánů. Výklad byl bez náčrtků, důkazů a vzorců, jsou zde formulované algoritmy pro určité operace s čísly, pravidla pro řešení úloh uvádějí vybrané cvičení a vzory, jak se řeší.“ (Kadlčíková, 2010, s 26)

Příklad úlohy:

Ze čtyř lidí, kteří obětovali v chrámu, druhý dal dvakrát více než první, třetí třikrát více než druhý a čtvrtý čtyřikrát více než třetí, a všichni dohromady dali 132. Kolik dal první? (Novotná, 2000, s. 10)

Období Číny

„Čínští matematikové měli největší úspěch v řešení úloh, které vedou k soustavám n lineárních rovnic s n neznámými, tato jejich metoda se nazývá fang-čcheng. Podobně jako matematické znalosti jiných národů, tak i čínská matematika se nerozvíjela izolovaně, ale díky vzájemné kulturní výměně.“ (Kadlčíková, 2010, s 27)

Příklad úlohy:

Dva lidé A, B obdrželi určitý počet mincí, které se má mezi ně rozdělit tak, že když k mincím A přidáme polovinu mincí B nebo k mincím B přidáme dvě třetiny mincí A, v obou případech dostaneme 48. Kolik mincí obdržel každý z lidí A, B? (Novotná, 2000, s. 12)

Období Islámských zemí

„Učenci zaměřovali hlavní úsilí k řešení praktických úloh a na jejich základě rozvíjeli i teoretické oblasti matematiky, zejména aritmetiku, teorii čísel, algebru, geometrii a trigonometrii.“ (Konforovič, 1989,v Kadlčíková, 2010, s 27)

Příklad úlohy:
V sadu utrhl první ze skupiny lidí jedno granátové jablko, druhý dvě a každý následující o jedno jablko více. Potom všichni, kdo trhali jablka, si je mezi sebou rozdělili rovným dílem a každý dostal šest granátových jablek. Kolik lidí trhalo jablka? (Novotná, 2000, s. 12)

Období ze středověké Evropy

„Středověká Evropa dala matematice málo. Muselo uběhnout tisíciletí než se díky činnostem zastánců a propagátorů vědy podařilo zdolat odpor církevních činitelů, kteří měli k matematice nedůvěru.“ (Kadlčíková, 2010, s 27)

Příklad úlohy z tohoto období:
Sto měřič pšenice rozdělte stu lidí tak, aby každý muž získal tři, každá žena dvě a každé dítě půl měřice. Kolik mužů, kolik žen a kolik dětí? (Novotná, 2000, s. 12)

3.3. Typologie slovních úloh

Slovní úlohy lze dělit z více hledisek. Uvedu zde několik nejčastěji používaných.

3.3.1. Dělení podle oblasti matematiky

Základním rozdělením slovních úloh podle oblasti matematiky je dělení na dvě skupiny (např. Vyšín, 1962; Odvárko, 1990). První skupinu představují slovní matematické úlohy, *„jsou vysloveny z větší části slovními výroky s minimálním použitím matematických symbolů.“* (Vyšín, 1962, s. 104) V zadání úlohy je sice řeč o číslech, operacích apod., pro její vyřešení je ale nejprve třeba zadání přeložit do příslušného kalkulu. Tuto skupinu můžeme dále rozdělit na:

- slovní aritmetické úlohy

  Příklad: Jakým číslem je třeba vynásobit 6, abychom získali 42?

- slovní algebraické úlohy

  Příklad: Sedmina určitého čísla je o 2 menší než jeho pětina. Které je to číslo? (Ženatá, 2010,s. 230)

- slovní úlohy s geometrickým obsahem

  Příklad: Co je množinou všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od tří různých bodů A,B,C, které neleží v téže přímce? (Trejbal, 1992, s. 130)

Druhou skupinu představují slovní úlohy s nematematickým obsahem. Jsou tvořeny textem, ve kterém je přítomný aspoň jeden termín, který zjevně nepatří do jazyka žádné matematické disciplíny. Témata těchto úloh jsou vzata ze života, technické praxe, přírodních věd apod. Z každé takové úlohy je při řešení nejprve třeba vytvořit matematickou úlohu (slovní nebo přímo algoritmickou[5]).

Příklad slovní úlohy s nematematickým obsahem a její matematizace:

Babička chce k Vánocům koupit vnukovi lyžařské vybavení. Zimní oblečení již chlapec má, proto babička počítala, že koupí: lyže za 6000,- Kč, lyžařské hůlky za 670,-Kč, lyžařské boty za 2750,-Kč, helmu za 1500,-Kč a vosky za 150,-Kč. V obchodě byly lyže v 10 % slevě, ale lyžařské boty byly o čtvrtinu dražší, než babička počítala. Kolik peněz babička utratí za vnukovo vybavení?

Matematizace úlohy:
6000+670+2750+1500+150-6000*0,10+2750*0,25

3.3.2. Dělení podle kontextu slovní úlohy

Dělení podle kontextu záleží na tom, jak si je autor vymezí. Nejčastěji jsou zmiňovány úlohy o společné práci, o pohybu, na počítání směsí, o dělení celku na části. Dále se také objevují úlohy na výpočet objem a povrch těles, úlohy, v niž se užívá měřítko mapy, dále úlohy vedoucí k výpočtu nejmenšího společného násobku či největšího

[5] Tento proces nazýváme *matematizace slovní úlohy*.

společného dělitele atd. Žáci se učí metodám řešení těchto úloh, což je pro ně východiskem pro řešení úloh s obdobnou tématikou. (Novotná, 2000, s. 19)

3.3.3. Dělení podle stupně vymezenosti úlohy

Slovní úlohy mohou být úplně nebo neúplně vymezené. Úplně vymezené slovní úlohy zahrnují všechny údaje, které jsou nezbytné k jejich vyřešení. Neúplně vymezené slovní úlohy mohou být jedním z následujících typů:

1. Úlohy obsahující všechny údaje potřebné pro jejich vyřešení, ale chybí v nich otázka. Otázku si žák musí sám formulovat
2. Úlohy obsahující nejen všechny potřebné údaje pro jejich vyřešení, ale navíc ještě některé nadbytečné nebo matoucí údaje. Ty mohou být pro řešení úlohy zcela neškodné, v některých případech ale mohou být zavádějící a vést až k nesprávnému řešení. Je na žákovi, aby tyto nesprávné údaje vyloučil.
3. Úlohy, jejichž zadání neobsahuje všechny údaje potřebné pro jejich úspěšné vyřešení. Tyto údaje musí žák dodat z vlastní zkušenosti, z literatury či dotazem.
4. Úlohy, jejichž zadání neobsahuje všechny potřebné údaje a místo nich jsou uvedeny některé nadbytečné údaje
5. Úlohy, ve kterých variují některé nutné a postačující znaky (Navrátilová, 2009, 20)

4. Řešení slovních úloh

Slovní úlohy mají v matematice významnou roli. Při řešení žáci rozvíjejí myšlení, představivost a pozornost. Na úlohách se vyjasňují a konkretizují matematické pojmy, dále upevňují početní návyky. Řešení slovních úloh žáky připravuje na využívání matematiky v běžném životě.

4.1. Postup řešení

Postupem řešení slovních úloh se zabývá mnoho autorů. Podle Novotné (2000, s. 21) jde řešení rozdělit do tří etap.

1. *„Etapa uchopování, která obsahuje*
    - *uchopování všech objektů a vztahů a identifikaci těch, které se týkají řešené situace, a eliminace těch, které jsou „navíc“,*
    - *hledání a nalezení všech vztahů, které se týkají řešitelského procesu,*
    - *hledání a nalezení sjednocujícího pohledu,*
    - *získání celkového vhledu do struktury problému.*
2. *Etapa transformace odhalených vztahů do jazyka matematiky a vyřešeníodpovídajícího matematického problému.*
3. *Etapa návratu do kontextu zadání úlohy.“*

Novotná říká, že tento popsaný postup řešení je pouze „ideálním“ postupem. Žáci nemusí při řešení slovních úloh postupovat lineárně, k některým etapám se můžou vracet a některou mohou zcela vynechat.

4.1.1. Etapa uchopování

Tuto etapu můžeme rozdělit na dvě části, a to porozumění textu úlohy a rozbor úlohy.

„Porozumění textu úlohy spočívá v tom, že žák je schopen přečíst zadání úlohy s porozuměním, dokáže rozpoznat předmět otázky a zadané údaje. Tyto údaje rozdělí na vztahy potřebné k řešení úlohy a ty, které jsou zadány navíc. Pro snadnější porozumění by měla slovní úloha mít pro žáka srozumitelný text, měla by obsahovat nějakou výzvu či „hádanku“. Neměla by obsahovat příliš mnoho bezvýznamných detailů a její text by neměl být příliš dlouhý.“ (Chromá, 2011, s. 10)

Je potřebné věnovat velkou pozornost zadaným podmínkám, které se vztahují k otázce úlohy (rozboru). Žák musí sledovat, které údaje jsou zadané a které se musí vypočítat. Jestliže toto žák správně pochopí, volí většinou i správné početní operace k vyřešení úlohy. Naopak nesprávný rozbor vede k tomu, že žák volí operace náhodně a jen hádá. U některých úloh je dobré znázornit si zadání na konkrétním modelu či grafickým znázorněním. Jestliže to úloha umožňuje, je znázornění objektu a vztahu důležitou součástí rozboru. Grafické znázornění dobrým žákům řešení usnadní a slabším přímo umožní řešit úlohu. (Blažková, 2002, s. 7)

4.1.2. Etapa transformace

„Vyjádření vztahů mezi zadanými údaji a hledaným výsledkem v matematickém jazyce se označuje jako matematizace reálné situace. Je důležité najít vztahy mezi tím, co je dané, a tím, co je neznámé. V mnoha úlohách je nutné zvolit označení neznámých údajů i údajů a vztahů zadaných.“ (Chromá, 2011, s. 11)

Odhad výsledku je významný pro správné vyřešení některých úloh, hlavně pokud se k výpočtu využívá kalkulátor. Jsou-li zadané údaje fyzikální veličinou, určujeme také, v jakých jednotkách bude výsledek vyjádřený. (Blažková, 2002, s. 12)

„Při řešení matematické úlohy používáme různých algoritmů. Žáci by při použití algoritmů měli nejprve stanovit strategii řešení. V průběhu řešení mohou svou strategii kontrolovat a v případě potřeby strategii upravit nebo nahradit některou vhodnější.“ (Chromá, 2011, s. 11)

4.1.3. Etapa návratu do kontextu úlohy

V této etapě je nutné ověřit, zda získaný výsledek je správný a odpovídá kontextu slovní úlohy. K tomu slouží zkouška správnosti. Při ní by žáci měli dodržovat nezbytnou zásadu dvou zkoušek při řešení slovní úlohy. Provádí se tzv. matematická zkouška, kdy žáci ověřují správnost vyřešení matematické úlohy (matematického modelu) situace ze zadání. Ověřit, zda úlohu vyřešili správně, lze také tím, že tuto úlohu řeší jiným způsobem. Druhou zkouškou je tzv. kontextová zkouška, při které si žák kontroluje proces matematizace, tj. kontroluje správnost vytvoření matematického modelu, a také kontroluje splnění podmínek daných kontextem slovní úlohy. (Chromá, 2011, s. 11)

Poslední fází je formulace odpovědi na otázku slovní úlohy. Žáci nejčastěji sestavují svou odpověď pomocí toho, jak je formulována otázka a podmínky slovní úlohy. (Blažková, 2002, s. 13)

4.2. Způsob řešení

Řešení úloh můžeme provádět dvěma způsoby. Jedná se o metodu analytickou a syntetickou.

Analytický způsob řešení vychází z otázky zadané úlohy, tedy zkoumá, co má být vypočítáno a co k tomu potřebujeme. Žáci postupují po jednotlivých krocích. Nejdříve musí použít údaje, které jsou zadané, a z nich postupně vypočítat i údaje, které zadané nejsou, ale jsou potřeba ke konečnému výsledku. Výhoda této metody spočívá v tom, že dochází k důkladnému promyšlení celé otázky a efektivnímu dosažení cíle. (Blažková, 2002, s. 4)

Řešení způsobem syntetickým vychází z textu slovní úlohy, tedy z konkrétních údajů. Žáci si zvolí dva údaje a vypočítají další potřebný údaj. Tento zjištěný údaj přidají k údaji ze zadání a zase zjistí údaj nový. Takto pokračují, dokud nezískají konečný výsledek, který odpovídá na otázku slovní úlohy. Nevýhodou této metody je, že se tímto způsobem vůbec nemusí dojít k odpovědi na otázku zadané úlohy. (Blažková, 2002, s. 5)

Proti použití syntetické metody uvádí Vyšín (1962, s. 110) několik námitek:

1. *„Úloha se často začíná řešit dříve, než byla formulována jako matematický problém.*
2. *Tzv. syntetickým postupem můžeme najít jedno řešení, ale mohou nám uniknout řešení další. Není možné beze všeho předpokládat, že daná úloha má jen jedno řešení. …*
3. *Tzv. syntetická metoda je nevhodná i po stránce výchovné. Matematika má žáky vychovávat k samostatné práci, přesně plánované; těmto požadavkům vyhovuje jen metoda analytická, při níž rozborem získáme zpravidla předpis pro sestavení řešení. Řešení „syntetickou metodou“ je zpravidla jakési počítání „ode zdi ke zdi.“*

Při řešení úloh může dojít k tomu, že používáme obě metody současně. Tento postup pak nazýváme analyticko-syntetický. (Blažková, 2002, s. 5)

4.3. Strategie řešení

Analýzou strategií řešení slovních úloh se ve světě i u nás zabývá mnoho autorů. O strategiích při řešení slovních úloh píše například Novotná (2000). Autorka uvádí, že je třeba zohlednit různé pohledy a uvádí některé z nich:

- *„Řešení bylo nalezeno náhodně nebo po získání vhledu do struktury úlohy.*
- *Řešení je založeno na identifikaci slov nebo slovních spojení v zadání, která jsou pro řešitele signálem pro použití vzorce / postupu, nebo naopak na porozumění struktuře úlohy do té míry, že řešitel je dokonce schopen převést ji na jednu nebo led) jednodušších úloh.*
- *Řešitel použil aritmetický nebo algebraický aparát.*
- *Při stejném zadání může řešitel volit různé zpracování zadaných vztahů. Tento pohled nemá „antagonistický“ charakter.“ (Novotná, 2000, s. 37)*

4.3.1. Náhodné nalezení řešení

Strategie pokus – omyl je způsob řešení, při kterém se žák pokusí výsledek uhodnout. Při takovém to zahájení řešitelského procesu je důležité, jak tento žák dále pokračuje. Dle Novotné mohou nastat tři situace:

- Prvním případem je, že žák při prvním pokusu dospěl k nějakému číslu (výrazu) a toto číslo prohlásí za výsledek. Žák nepoužívá pravidlo dvojí zkoušky při řešení slovní úlohy, ani se nesnaží nalézt další možná řešení.
- Další případ nastává tehdy, kdy žák dospěl k „výsledku“ a ten dále podrobuje zkoušce správnosti. Zjistí, že jeho nalezené řešení vyhovuje podmínkám úlohy a označí ho za správný. Žák dále nehledá jiná možná řešení, nebo se naopak snaží zjistit, jestli má tato úloha ještě jiné řešení.
- Poslední situací je, kdy žák nalezl „výsledek“, provedl zkoušku správnosti a zjistil, že jeho řešení nevyhovuje kontextu úlohy. V této situaci se žák rozhoduje, zda bude hledat jiné řešení této úlohy. Buď se rozhodne další výsledek již nehledat a řešení ukončí, nebo se snaží nalézt nové a správné řešení. Použije opět strategii pokus – omyl, nebo se rozhodne použít své zkušenosti, které získal při předchozím „špatném“ řešení, a použije jinou strategii řešení slovní úlohy. (Novotná, 2000, s. 38)

Mnoho učitelů považuje metodu pokus – omyl za nevhodnou. Novotná uvádí dva důvody, proč je tato metoda nevhodná:

1. *„podporuje v žákovi pocit, že řešení úlohy je záležitost náhody, řešiteli stačí „mít štěstí“,*
2. *nepodporuje rozvoj žákova strategického myšlení.“* (Novotná, 2000, s. 40)

4.3.2. Řešení signálem

Toto řešení je založené na identifikaci slov a vztahů v zadání, které slouží řešiteli jako určitý signál, který mu napoví, který vzorec či postup má použít. Signál se zařazuje do skupiny tzv. protetických poukazů a je z této skupiny nejčastější. Protetický poukaz Hejný (1990, s. 44) definuje takto: *„Protetickým poukazem nazveme informaci, která řešiteli řekne nebo aspoň napoví, jaký postup řešení volit. “* (Chromá, 2011, s. 14)

4.3.3. Odlišné zpracování vztahů

Při stejném zadání může žák úlohu různě uchopit z hlediska vzájemných vazeb zadaných v textu úlohy. Různé způsoby uchopování nemusejí být v protikladu, mohou se i prolínat a doplňovat. (Novotná, 2000, s. 45)

4.3.4. Algebraické strategie

„Takto nazýváme strategie, při kterých je použita jedna nebo více rovnic. Při řešení slovních úloh ve školách bývá častý algebraický způsob řešení (např. úlohy o směsích, o společné *práci). Ve většině případů bývají žáci k němu soustavně didakticky vedeni. Aby žáci mohli tento způsob řešení použít, musejí mít zvládnutý daný typ rovnice či nějaký jiný aparát, potřebný k řešení.*“ (Chromá, 2011, 14)

4.3.5. Aritmetické strategie

„Aritmetické strategie jsou strategie, při kterých řešitel nepoužívá pro výpočet výsledku slovní úlohy rovnice. Tyto strategie lze rozdělit do čtyř základních skupin. Je to způsob řešení slovní úlohy činnostní, grafické, experimentální a řešení úvahou. Uvedené způsoby řešení se obvykle nevyskytují odděleně, ale žáci často řeší úlohu kombinací několika způsobů“. (Chromá, 2011, 14)

Činnostní řešení

Takový způsob řešení je založen na manipulaci s předměty. Žák si vymodeluje situaci zadanou slovní úlohou a pomocí přesouváním a přeskupováním předmětů nalezne odpověď na otázku úlohy. Těmito předměty mohou být počitadlo, soubor knoflíků, tyčinek, kamínků, špejlí apod. Činnostní řešení slovní úlohy požívají nejvíce žáci na prvním stupni základní školy. Kuřina (1990, s. 61) uvádí: *„Na prvním stupni základní školy jsou takovéto modely nezastupitelné, neboť umožňují reprezentovat aritmetické operace činnostmi, a tak pomáhají žákům osvojit si hlouběji např. vlastnosti početních úkonů.* “

Grafické řešení

Při řešení slovní úlohy žák dospěl k jejímu výsledku pomocí grafického znázornění. Řešení vzniká obyčejně přesným promyšlením úlohy se všemi detaily a vhodným zvolením způsobu znázornění. Nejběžněji používaným grafickým řešením je obrázek, tabulka, schéma, graf apod. Nalézt grafický způsob řešení nebývá pro žáky snadné, ale následné řešení je často oproti jiným způsobům jednodušší a přehlednější. (Chromá, 2011, 15)

Experimentální řešení

Experiment lze popsat jako záměrný způsob získávání zkušeností, které se týkají problematiky úlohy a umožní ji tak žákovi lépe řešit. Žák se nejčastěji k tomuto způsobu řešení uchyluje tehdy, když má problém pochopit, co se vlastně od něho v úloze požaduje. Řešení úlohy experimentem je pro žáky v mnoha případech samo o sobě motivací a prohlubuje u nich schopnost analyzovat různé situace a jevy. *„Žiaci základnej školy majú prirodzenú túžbu skúmať svet vlastnou aktivitou. Zdá se však, že sa táto vzácna schopnosť postupne s vekom žiaka vytráca.* “ (Hejný a kol., 1990, s. 326)

Nejčastěji používaným způsobem řešení experimentem je řešení úlohy aproximací, systematickým pokusem a řešení pokus – omyl. Při řešení aproximací žák vhodně volí čísla (možný výsledek) ve snaze přiblížit se co nejvíce k výsledku úlohy. Činí to tak dlouho, než se dobere konečného výsledku. Systematický pokus označuje strategii řešení, kdy žák systematicky testuje všechny možné vhodné kombinace. Ke strategii pokus – omyl se nejčastěji uchýlí žák, který nenalezl cestu k úspěšnému vyřešení úlohy. (Chromá, 2011, s. 16)

Řešení úvahou

Při řešení slovní úlohy úvahou většinou úvaha probíhá pouze v hlavě žáka. Někdy je žák schopen tuto úvahu zcela či alespoň částečně interpretovat, ale bývá tomu většinou až po vyřešení úlohy. Žák nejčastěji uvažuje o řešení a zapisuje pouze doprovázející výpočty, které mu při úvahách vycházejí. Tyto strategie Novotná nazývá netradiční nebo neškolské. Myslí tím strategie, při kterých žáci vyhledávají vlastní postupy, které jsou založené především na vhledu do problému. (Novotná, 2000, s. 45)

5. Geometrická tělesa[6]

Dohledat definici geometrického tělesa bylo téměř nemožné. Nalezla jsem pouze jednu jedinou definici. Ta zní podle E. Pomykalové: „*Geometrické těleso je prostorový omezený souvislý geometrický útvar. Jeho hranicí nazývanou také povrchem je uzavřená plocha.“* (Pomykalová, 2006, s. 123, v Dlouhá, s. 9)

U každého geometrického tělesa můžeme vypočítat povrch a objem.

Povrch tělesa je velikost plochy, která těleso ohraničuje, počítá se v metrech čtverečních a odvozených jednotkách, můžeme ho vyjádřit i v dalších (v běžném životě asi používanějších) jednotkách, např. v arech, hektarech. Povrch se podle normy značí písmenem *S*. (Havrlant, v Dlouhá, 2012, s. 9)

Objem vyjadřuje velikost prostoru, kterou těleso zabírá. Objem se počítá v metrech krychlových a odvozených jednotkách, můžeme ho vyjádřit i v dalších (v běžném životě asi používanějších) jednotkách, např. v litrech, hektolitrech. Objem se podle normy značí písmenem *V*. (Wikipedie, v Dlouhá, 2012, s. 9)

Protože se v diplomové práci zabývám pouze jehlanem a kuželem, uvádím zde pouze základní pojmy těles jehlanového typu, kužele a také charakteristiku, vlastnosti a vzorce

[6] 5. kapitola převzata (Dlouhá, 2012)

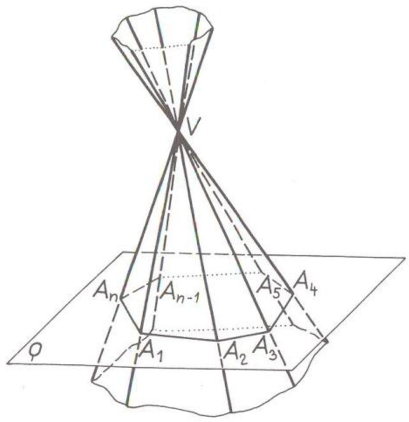
pro výpočet jehlanu a kužele, které jsem převzala ze své bakalářské práce. Informace o dalších tělesech můžete nalézt již ve zmiňované bakalářské práci. (Dlouhá, 2012)

5.1. Tělesa jehlanového typu

5.1.1. Základní pojmy

Jehlanová plocha

Je dán n-úhelník $A_1 A_2 ... A_n$ ležící v rovině ρ a bod V, který v rovině ρ neleží (viz obrázek 1). Jehlanová plocha je množina všech bodů přímek, které procházejí bodem V a protínají obvod mnohoúhelníku. Bod V je vrcholem jehlanové plochy a n-úhelník $A_1 A_2 ... A_n$ je řídící mnohoúhelník. (Polák, 1978, s. 491, Pomykalová, 2006, s. 125)



Obrázek 1

Hrana jehlanové plochy

Hranou je přímka jehlanové plochy procházející vrcholem řídícího mnohoúhelníku. (Polák, 1978, s. 491)

Stěna jehlanové plochy

Stěna je množina všech bodů přímek jehlanové plochy, které protínají tutéž stranu řídícího mnohoúhelníku, je to dvojice vrcholových úhlů. (Polák, 1978, s. 491)

Jehlanový prostor

Jehlanový prostor je množina všech bodů přímek, které procházejí bodem V a protínají řídící mnohoúhelník $A_1 A_2 ... A_n$. (Polák, 1978, s. 491)

Tělesa jehlanového typu

Tělesa jehlanového typu jsou tělesa, která tvoří část jehlanového prostoru omezenou jehlanovou plochou a rovinou, která je různoběžná s hranami jehlanové plochy a zároveň neprochází jejím vrcholem. (viz obrázek 1)

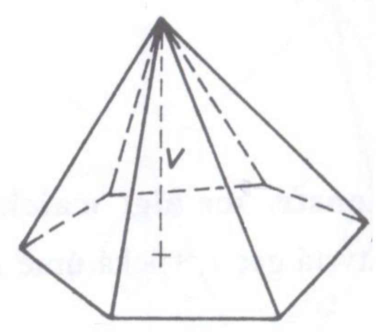
Podstavu tělesa tvoří mnohoúhelník, v němž protíná tato rovina jehlanový prostor. Strany podstavy se nazývají podstavné hrany. Vrcholy podstavy a vrchol V jehlanové plochy se nazývají vrcholy jehlanu. Vrchol V je hlavní vrchol jehlanu. Úsečky na hranách jehlanové plochy, které jsou omezené hlavním vrcholem a jednotlivými vrcholy podstavy, se nazývají boční hrany tělesa. Trojúhelníky, z nichž každý je určen hlavním vrcholem a dvěma sousedními vrcholy podstavy, jsou boční stěny tělesa. Výška jehlanu je úsečka spojující hlavní vrchol a patu kolmice spuštěné z něho na rovinu podstavy. (Polák, 1978, s. 491, Pomykalová, 2006, s. 125)

Mezi tato tělesa můžeme zařadit jehlan a komolý jehlan.

5.1.2. Jehlan

Charakteristika

Jehlan je těleso, jehož základnu (nebo také podstavu) tvoří mnohoúhelník. (viz obrázek 2) Podle počtu stran podstavy hovoříme o jehlanu trojbokém, čtyřbokém, pětibokém atd.



Obrázek 2

Vlastnosti

Pokud tvoří základnu jehlanu mnohoúhelník o n stranách, má jehlan celkem $n + 1$ vrcholů, $2n$ hran a $n + 1$ stěn.

Jehlan nemůže nikdy být středově souměrný. Jehlan je osově souměrný pouze tehdy, je-li podstava středově souměrná a průmět vrcholu jehlanu do roviny podstavy je shodný se středem souměrnosti podstavy. (Jinými slovy: vrchol jehlanu musí ležet „kolmo nad středem souměrnosti podstavy“.) Osou souměrnosti je v takovém případě spojnice vrcholu se středem souměrnosti podstavy.

Jehlan může být rovinově souměrný pouze tehdy, je-li podstava osově souměrná a průmět vrcholu jehlanu do roviny podstavy leží na ose souměrnosti podstavy. (Jinými slovy: vrchol jehlanu musí ležet „kolmo nad osou souměrnosti podstavy“.) Rovinou souměrnosti je v takovém případě rovina určená osou souměrnosti podstavy a vrcholem jehlanu.

Vzorce pro výpočty

a – délka strany

v – výška

S_p – obsah podstavy

S_{pl} – obsah pláště

Objem $V = \frac{1}{3} S_p v$

Povrch $S = S_p + S_{pl}$

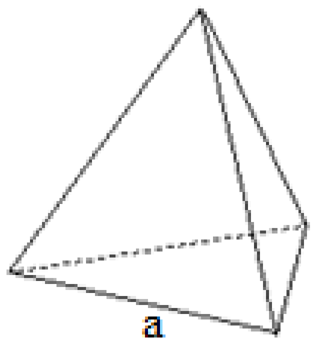
Na výše uvedených vzorcích je zajímavé, že pokud budu vrchol jehlanu posunovat v rovině rovnoběžné s rovinou podstavy, nemění se objem (obsah podstavy i výška zůstávají stejné), ale pouze povrch – ten může při posouvání vrcholu „dostatečně daleko“ v dané rovině růst nad všechny meze.

Speciální případy

Pokud je podstavou jehlanu pravidelný mnohoúhelník a vrchol leží kolmo nad těžištěm podstavy, mluvíme o pravidelném jehlanu. „Pravidelnost“ jehlanu obvykle podstatně zjednodušuje výpočet jeho objemu a povrchu.

Pravidelný čtyřstěn

Pravidelný čtyřstěn je jehlan, jehož podstava i všechny tři boční stěny jsou rovnostranné trojúhelníky. (viz obrázek 3) Tento čtyřstěn má stejný tvar všech stěn i délku všech hran. Jedná se tedy o jedno z platónských těles.



Obrázek 3

Jeho objem a povrch lze vypočítat z délky jeho hrany a:

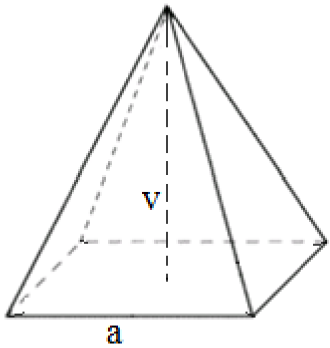
Objem $V = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3$

Povrch $S = \sqrt{3} a^2$

Jeho výšku lze vypočítat podle vzorce $v = \frac{\sqrt{6}}{3} a$

Pravidelný čtyřboký jehlan

Pokud má jehlan čtvercovou podstavu a vrchol kolmo nad průsečíkem úhlopříček základny, hovoříme o pravidelném čtyřbokém jehlanu. (viz obrázek 4)



Obrázek 4

Jeho objem a povrch lze vypočítat z délky strany základny a a výšky v :

Objem $V = \frac{1}{3}a^2v$

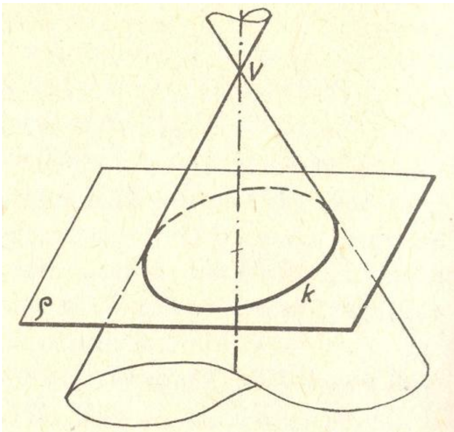
Povrch $S = a^2 + 4\frac{a\sqrt{v^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}}{2} = a\left(a + \sqrt{4v^2 + a^2}\right)$

5.2. Kužel

5.2.1. Základní pojmy

Kruhová kuželová plocha

Je dána kružnice k v rovině ρ a bod V, který v rovině ρ neleží. Kruhová kuželová plocha je množina všech bodů přímek procházejících bodem V a protínajících kružnici k zvanou řídící kružnice kuželové plochy. Bod V se nazývá vrchol kuželové plochy. (viz obrázek. 5) (Polák, 1978, s. 492)



Obrázek 5

Kruhový kuželový prostor

Kruhový kuželový prostor je množina všech bodů přímek procházejících bodem V a protínající řídící kruh, což je kruh omezený řídící kružnicí k. (Polák, 1978, s. 492)

Kruhový kužel

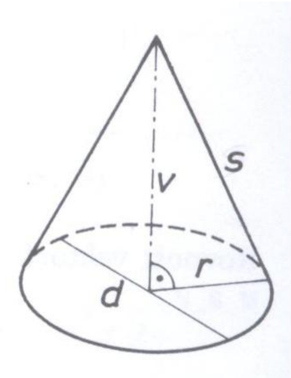
Kruhový kužel je těleso, které tvoří část kruhového kuželového prostoru. Je omezená kruhovou kuželovou plochou a rovinou, která je různoběžná s přímkami kuželové plochy, ale neprochází jejím vrcholem V. Vyplňují jej tedy všechny úsečky, jejichž jeden krajní bod je ve vrcholu V a druhými krajními body jsou jednotlivé body řídícího kruhu.

Podstava kužele je řídící kruh. Strany kužele jsou úsečky, jejichž jeden krajní bod je ve vrcholu V a druhý na řídící kružnici. Plášť tvoří množina stran kužele. Výškou rozumíme úsečku spojující vrchol kužele a patu kolmice spuštěné z něho na rovinu podstavy. Rotační kužel je speciální případ kruhového kužele. (Polák, 1978, s. 493, Pomykalová, 2006, s. 135)

5.2.2. Rotační kužel

Charakteristika

Rotační kužel je rotační těleso vzniklé otáčením pravoúhlého trojúhelníku v prostoru okolo jedné z odvěsen. (viz obrázek 6) Otáčením druhé odvěsny vznikne kruhová podstava kužele (někdy také nazývaná základna kužele), otáčením přepony pak kuželová plocha nebo jinak plášť kužele. Tento plášť je v podstatě kruhová výseč, jejíž úhel záleží na poměru výšky kužele a poloměru podstavy. Společný vrchol přepony a osy otáčení nazýváme vrchol kužele.



Obrázek 6

Vlastnosti

Kužel není středově souměrný. Kužel je osově souměrný podle spojnice vrcholu kužele se středem podstavy.

Kužel je rovinově souměrný podle nekonečně mnoha rovin – rovinou souměrnosti je každá rovina, která v sobě obsahuje jeho osu (tj. vrchol a střed podstavy).

Vzorce pro výpočty

d – průměr podstavy

r – poloměr podstavy

s – délka strany kužele

v – výška

S_p – je obsah podstavy

S_{pl} – je obsah pláště

Objem $V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{12}\pi d^2 v$

Povrch $S = S_p + S_{pl} = \pi r(r + s)$

Praktická část

Cílem práce je sestavit vlastní didaktický test a analyzovat postupy řešení matematických úloh u žáků devátého ročníku ZŠ Amálská, porovnat výsledky dosažené v testu u žáků ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů s žáky z „klasické[7]" třídy a zjistit míru úspěšnosti celé třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů a třídy „klasické" při řešení matematických úloh.

6. Cíle a metody šetření

6.1. Cíle

Cílem praktické části je sestavit vlastní didaktický test a použít ho pro šetření.

Pro šetření jsem si stanovila následující cíle:

- Analyzovat postupy řešení matematických úloh u žáků devátého ročníku základní školy.
- Porovnat bodové výsledky dosažené v testu u žáků ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů s žáky z „klasické" třídy.
- Zjistit míru úspěšnosti celé třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů a třídy „klasické" při řešení matematických úloh.

6.2. Metody šetření

Zjištění potřebných dat bylo provedeno pomocí nestandardizovaného didaktického testu, který jsem vytvořila. Test obsahoval čtyři slovní úlohy se vzrůstající obtížností. První tři úlohy byly otevřené a čtvrtá byla uzavřená.

[7] třída bez zaměření, v této třídě nejsou ponecháni pouze slabí žáci

Žáci z obou tříd absolvovali test v půlených hodinách matematiky. Každý žák seděl sám v lavici. Žáci mohli při testu používat kalkulačky. Na řešení testu měli žáci celou vyučovací hodinu, cca 45 minut.

Při zpracování dat jsem u každé úlohy zjišťovala absolutní a relativní četnost bodů, aritmetický průměr dosažených bodů, modus a medián pro porovnání žáků z jednotlivých tříd. Dále jsem porovnávala míru úspěšnosti v procentech každé úlohy a celého testu obou tříd.

7. Charakteristika vzorku

Šetření se zúčastnili žáci 9. ročníku ZŠ Amálská. Tato základní škola se nachází ve Středočeském kraji, v Kladně. Jedná se o plně organizovanou školu.

Škola byla zařazena do skupiny škol se zaměřením – rozšířená výuka matematiky a přírodovědných předmětů. Každý rok je na 2. stupni otevřena jedna třída s tímto zaměřením. Žáci do třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů jsou přijímáni na základě výběrového řízení po podání přihlášky zákonným zástupcem.

Škola má 18 tříd v devíti ročnících. V současné době školu navštěvuje 523 žáků.

V 9. ročníku jsou dvě třídy: třída se zaměřením na rozšířenou výukou matematiky a přírodovědných předmětů, kterou momentálně navštěvuje pětadvacet žáků, a to sedm dívek a osmnáct chlapců. A „klasická“ třída, kterou navštěvuje též pětadvacet žáků, a to dvanáct dívek a třináct chlapců. Šetření se zúčastnilo čtyřiadvacet žáků ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů, jedna žákyně je dlouhodobě nemocná, a třiadvacet žáků z „klasické“ třídy, chyběl jeden žák a jedna žákyně.

Žáci ve třídě se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů mají v každém ročníku po pěti hodinách matematiky týdně. V „klasické“ třídě se matematika vyučuje v každém ročníku po čtyřech hodinách týdně. V každé třídě při jedné hodině matematiky jsou žáci rozděleni na dvě skupiny.

Vzdělávání ve škole je uskutečňováno podle vlastních školních vzdělávacích programů (dále „ŠVP“). ŠVP pro základní vzdělávání je zaměřen všeobecně, na druhém stupni je nadto žákům nabízena možnost navštěvovat v každém ročníku třídu se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů po splnění podmínek výběrového řízení.

V ŠVP pro třídu se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů i „klasickou“ třídu je problematika jehlanu a kužele zařazena v 9. ročníku. Školní výstupy, které jsou pro oba typy tříd stejné, jsou zformulovány takto: *Žák/ žákyně*

- *vysvětlí pojmy a základní vlastnosti jehlanu, kužele*
- *načrtne tato tělesa*
- *vypočítá povrch a objem jehlanu, kužele*
- *využívá kalkulátor k základním operacím*
- *vyhledá potřebné informace pro práci v tabulkách, literatuře*
- *řeší slovní úlohy a reálné příklady z praxe*

Učivo je zde uvedeno takto:

- *objem a povrch jehlanu*
- *objem a povrch kužele*
- *slovní úlohy*

8. Tvorba didaktického testu

Nejprve jsem začala s plánováním testu. Přemýšlela jsem, jaká tělesa a který ročník bude cílem mého testu. Následně jsem se rozhodla utvořit test pro žáky devátého ročníku základní školy. Zaměřila jsem se na jehlan a kužel. Tato tělesa jsem si vybrala za téma hned ze dvou důvodů. Zaprvé toto téma žáci probírají až po přijímacích zkouškách na střední školu a zajímalo mě, zda po přijetí na střední školu věnují dostatečnou pozornost probíranému učivu. A druhý důvod byl, že jsem po prostudování ŠVP vybrané školy zjistila, že obě třídy mají v ŠVP stejné výstupy z tohoto učiva.

Navíc úlohy z početní geometrie patří mezi učivo, které považují žáci i někteří učitelé za obtížné. Pro žáky může být téma obtížné, protože nemají dostatečně rozvinutou prostorovou představivost, a pro učitele, protože vzhledem k obsahu témat z matematiky, která se musí ve školách probrat, nezbývá učiteli na toto téma tolik času, kolik by potřeboval.

Po určení cíle testu jsem začala promýšlet, jak by test mohl vypadat. Rozhodla jsem se sestavit test, který bude obsahovat otevřené i uzavřené úlohy se vzrůstající obtížností.

Prošla jsem několik učebnic a sbírek příkladů pro základní školu, např. Matematika pro 9. ročník základní školy: Jehlan, kužel, koule, finanční matematika. (Odvárko, Kadleček, 2001), Geometrie: učebnice pro 9. ročník (Rosecká, Míček, 2002), Přehled učiva matematiky s příklady a řešním (Ženatá, 2010), Přehled matematiky: pro 2. stupeň základní školy (Řepíková, 2013), Matematika: přehled učiva základní školy s řešenými příklady (Lukšová, Tomicová, 1999), Matematika 9: pro základní školy a víceletá gymnázia., geometrie (Binterová, Fuchs, Tlustý 2010), Sbírka zajímavých úloh z matematiky 2. díl (Trejbal, 1996).

Vybrala jsem několik úloh, které mě zaujali buď svým zadáním, nebo náročností, nebo obrázkem. Po konzultaci s učitelkami z devátých tříd ZŠ Amálská jsem vybrala pouze čtyři úlohy, a to s časových důvodů, aby test žáci stihli v rámci jedné vyučovací hodiny. Kromě jedné úlohy jsem upravila zadání, protože tak, jak byla zadaná v učebnicích a sbírkách, mi nevyhovovalo. Zadání nesplňovalo definici slovní úlohy, tak jak jsem ji pro potřeby diplomové práce definovala. Také jsem se snažila, aby úlohy měly vzrůstající obtížnost. Rozdělila jsem úlohy na jednodušší a obtížnější. Za jednodušší úlohy v této práci považuji takové, kde v zadání úlohy mají žáci přímo napsané, zda mají počítat povrch nebo objem tělesa a k dosažení výsledku stačí dopočítat jeden potřebný údaj, např. z průměru poloměr, výšku trojúhelníků, které tvoří plášť jehlanu. Za obtížnější úlohy ve své práci považuji takové, kde v zadání úlohy již není řečeno, zda žáci potřebují k vyřešení úlohy spočítat povrch nebo objem tělesa, např. hmotnost, spotřeba barvy a zadání je delší.

9. Složení úloh v testu

V této kapitole jsou uvedeny jednotlivé úlohy testu, jejich charakteristiky, předpokládané chyby, které by žáci mohli u dané úlohy udělat (chybějící odpověď jsem za chybu nepovažovala), správná řešení a analýza žákovských řešení.

Zadaní testu, jak jej dostali žáci, je přiloženo v příloze č. 2. Žáci mohli získat maximálně osmnáct bodů. V přílohách č. 3 – 7 jsou zařazeny ukázky žákovských řešení, a to vždy nejlepší a nejhorší práce dle počtu bodů z každé třídy.

9.1. Úloha číslo 1

Vypočítej objem hromady písku tvaru rotačního kužele o průměru 7 m a výšce $\boldsymbol{v = 2{,}5}$ m. (inspirováno Rosecká, 2002, s. 69)

První slovní úlohu můžeme považovat za jednoduchou slovní úlohu na rotační kužel. Podobný typ úlohy najdeme v každé učebnici a sbírce pro základní školy. Nachází se většinou na začátku slovních úloh na rotační kužel. Tato úloha by měla sloužit k upevnění, zapamatování a procvičení vzorce. Neměla by žákům dělat větší problémy.

Ve slovní úloze je jasný úkol (vypočítej objem) a žáci okamžitě po přečtení vědí, co mají vypočítat. Potřebné údaje k výpočtu vyčtou žáci ze zadání úlohy. Jen si musí dát pozor, že mají zadaný průměr, ale pro výpočet objemu potřebují poloměr.

Správné řešení:

$d = 7\ \text{m} \Rightarrow r = 3{,}5\ \text{m}$

$v = 2{,}5\ \text{m}$

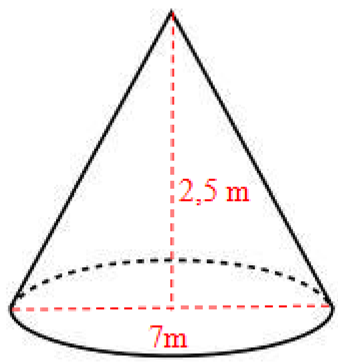
$V = ?\ \text{m}^3$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

$$V = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 3{,}5^2 \times 2{,}5\ \text{m}^3$$

$$\underline{\underline{V \cong 32\ \text{m}^3}}$$

Náčrtek:



Obrázek 7

Objem hromady písku je $32\ \text{m}^3$.

Žáci mohli za první úlohu získat maximálně 2 body. Jeden bod za správný vzorec a druhý za správný výsledek.

Předpokládám, že v této úloze by žáci mohli udělat tyto chyby:

- nebudou umět vzorec pro výpočet objemu kužele,
- neuvědomí si, že mají zadaný průměr a ne poloměr,
- udělají ve výpočtu numerickou chybu.

9.1.1. Analýza žákovských řešení

Tato úloha nedělala žákům velké problémy.

Ve třídě se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů získali dva žáci nula bodů. Tuto úlohu neřešil pouze jeden žák. Tento žák téměř celou hodinu nepracoval, tipnul si pouze jednu odpověď u uzavřené úlohy (viz příloha č. 5). Paní učitelka mi řekla, že po přijímacích zkouškách vše ignoruje a v hodinách téměř nepracuje. Druhou nulu získala žákyně, která měla špatně vzorec pro výpočet kužele. Plný počet bodů získalo devatenáct žáků. Tři žáci dostali jeden bod, udělali jednu z následujících chyb:

- špatně vypočítali poloměr – jeden žák,
- neuvědomili si, že mají zadaný průměr – dva žáci.

V „klasické“ třídě dostalo nula bodů pět žáků. Na tuto úlohu neodpověděli tři žáci. Jeden žák neuměl vzorec pro výpočet objemu jehlanu a jedna žákyně zaměnila jehlan za válec (viz příloha 6). Plný počet bodů získalo jedenáct žáků. Jeden bod získalo sedm žáků, udělali ve výpočtu jednu z chyb:

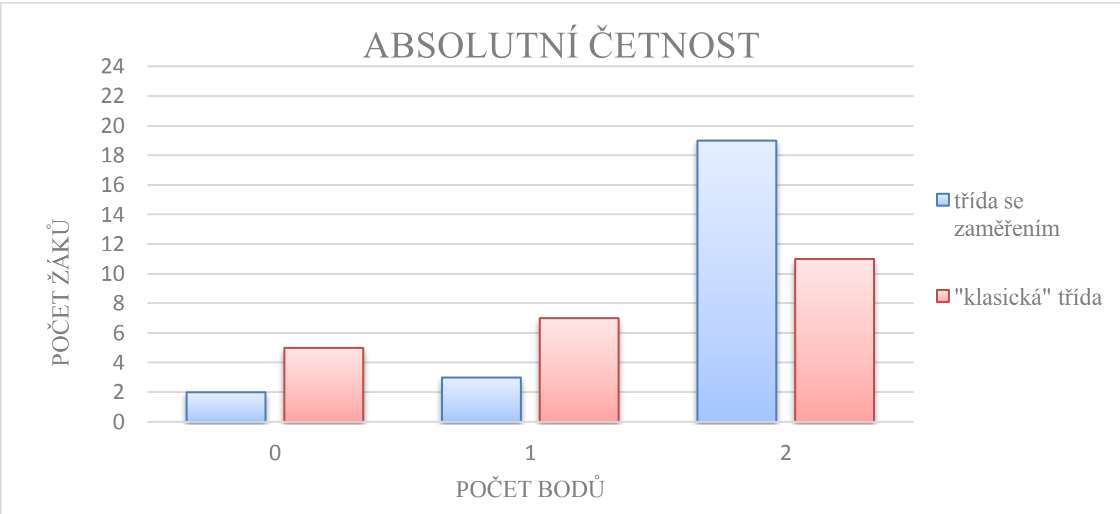
- numerickou chybu (po dosazení čísel zapomněli poloměr umocnit na druhou, když ve vzorci to měli) – pět žáků,
- špatně vypočítali poloměr – jeden žák,
- neuvědomili si, že mají zadaný průměr – jeden žák.

Výsledky jsem zpracovala do následujících tabulek a grafů, ve kterých jsou vidět rozdíly mezi třídami. Absolutní četnost je počet žáků dle dosaženého počtu bodů v úloze. Relativní četnost je procentuálně vyjádřený počet žáků dle dosaženého počtu bodů v úloze. Hodnoty z tabulky 1 jsou zobrazeny v přehledných grafech 1, 2, 3. V tabulce 2 jsou uvedeny další statické údaje, ze kterých jsou patrné rozdíly mezi jednotlivými třídami.

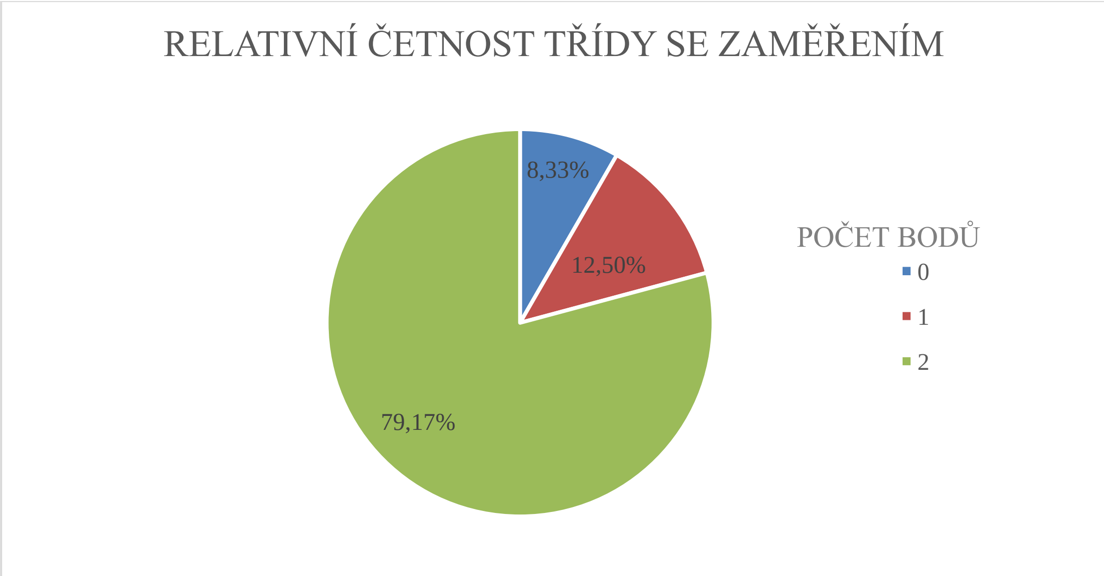
Tabulka 1: Počet získaných bodů – absolutní, relativní četnost

1. úloha				
počet bodů		0	1	2
absolutní četnost	třída se zaměřením	2	3	19
	"klasická" třída	5	7	11
relativní četnost [%]	třída se zaměřením	8,33	12,50	79,17
	"klasická" třída	21,74	30,43	47,83

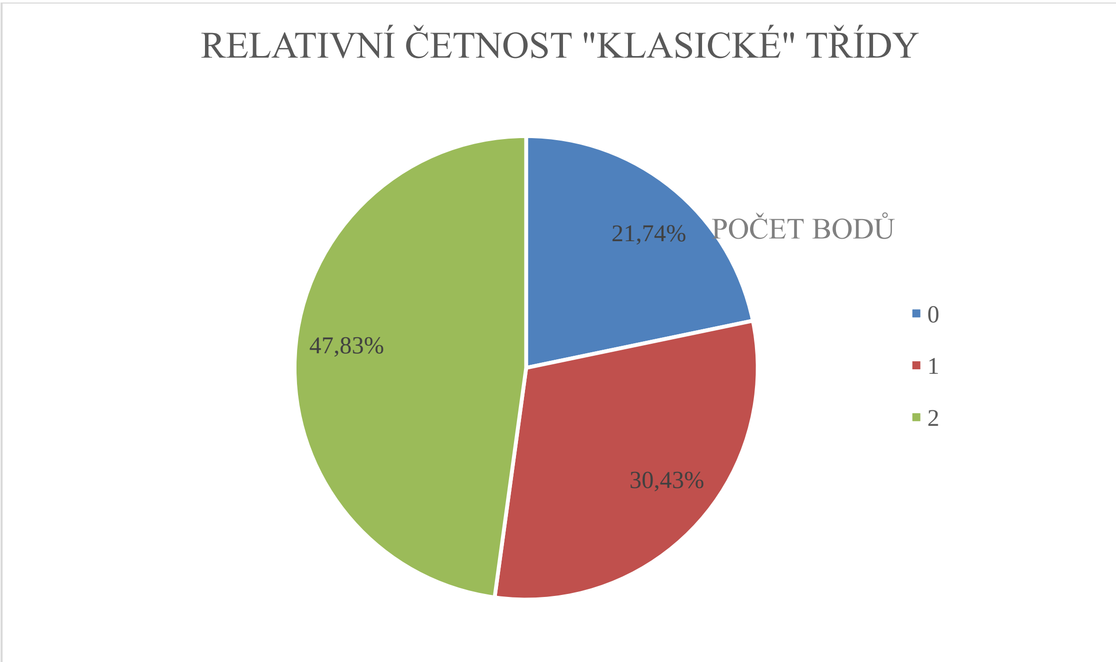
Graf 1: Absolutní četnost



Graf 2: Relativní četnost třídy se zaměřením



Graf 3: Relativní četnost „klasické“ třídy



Tabulka 2: Základní statistické údaje

1. úloha - 2 body		
aritmetický průměr	třída se zaměřením	1,74
	"klasická" třída	1,26
modus	třída se zaměřením	2
	"klasická" třída	2
medián	třída se zaměřením	2
	"klasická" třída	1

9.2. Úloha číslo 2

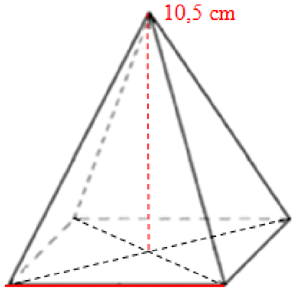
Vypočítej povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou $6,4$ cm a výškou jehlanu $10,5$ cm. (Ženatá, 2010, s. 446)

Druhou slovní úlohu můžeme také považovat za jednoduchou úlohu. Tento typ úlohy se vyskytuje téměř ve všech učebnicích a sbírkách pro základní školu. V této úloze je také jasný úkol, žáci ihned vědí, co mají počítat – v tomto případě povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu.

Žáci si před výpočtem musí uvědomit dvě věci. Za prvé, že podstavou pravidelného čtyřbokého jehlanu je čtverec. A za druhé by si měli uvědomit, že povrch pláště se skládá ze čtyř trojúhelníků, pro které potřebují dopočítat výšku.

Správné řešení:

Náčrtek:



Obrázek 8

$a = 6{,}4 \text{ cm}$

$v = 10{,}5 \text{ cm}$

$S = ?\ cm^2$

$v_a^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

$v_a^2 = 10{,}5^2 + 3{,}2^2 \text{ cm}^2$

$v_a = \sqrt{120{,}49} \text{ cm}$

$\underline{\underline{v_a \cong 11 \text{cm}}}$

$S_p = a^2$

$S_p = 6{,}4^2 \text{ cm}^2$

$\underline{\underline{S_p = 40{,}96 \text{ cm}^2}}$

$S_{pl} = 4\frac{av_a}{2}$

$S_{pl} = 4 \times \frac{6{,}4 \times 11}{2} \text{ cm}^2$

$S_{pl} = 4 \times 35{,}2 \text{ cm}^2$

$\underline{\underline{S_{pl} = 140{,}8 \text{ cm}^2}}$

$S = S_p + S_{pl}$

$S = 40{,}96 + 140{,}8 \text{ cm}^2$

$\underline{\underline{S = 181{,}76 \text{ cm}^2}}$

Povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu je $181{,}76 \text{ cm}^2$.

Žáci mohli za tuto úlohu získat celkem 4 body. A to za každý výpočet jeden bod.

U této úlohy předpokládám, že by mohli žáci udělat tyto chyby:

- špatně si určí tvar podstavy,
- nebudou znát vzorec pro výpočet obsahu podstavy,
- nebudou znát vzorec pro výpočet obsahu pláště,
- nebudou znát vzorec pro výpočet povrchu jehlanu,
- zamění tělesovou výšku za stěnovou výšku,
- neznají správné znění Pythagorovy věty
- špatně určí přeponu
- špatně určí některou odvěsnu
- u obsahu pláště zapomenou na to, že se skládá ze čtyř trojúhelníků,
- udělají ve výpočtu numerickou chybu.

9.2.1. Analýza žákovských řešení

Ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů dostali tři žáci nula bodů, z toho dva žáci úlohu vůbec neřešili a třetí žák neuměl vzorce. Plný počet bodů získali čtyři žáci. Tři body nezískal ani jeden žák. Dva body získalo sedm žáků. U těchto žáků jsem našla jednu z následujících chyb:

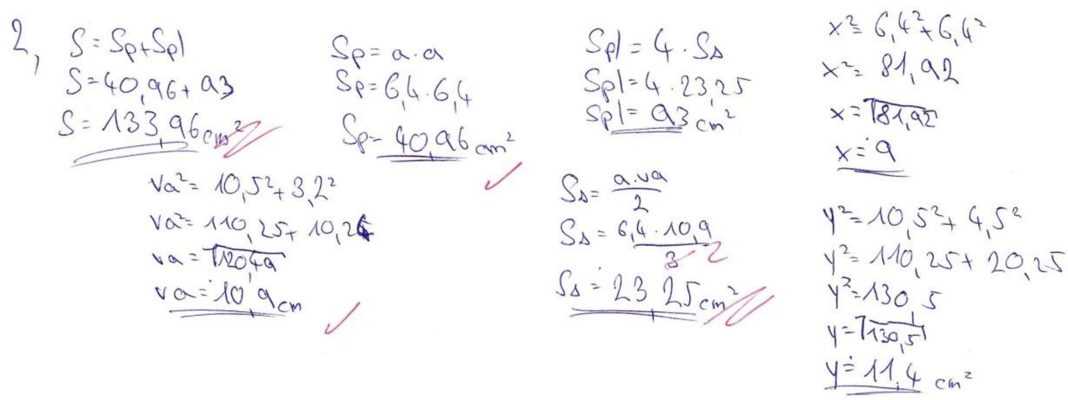
- u výpočtu obsahu pláště zapomněli, že se skládá ze čtyř trojúhelníků a v důsledku toho měli i špatně výpočet povrchu jehlanu – jeden žák,
- udělali při výpočtu numerickou chybu (např. vzorec pro výpočet obsahu pláště mají správně, dosazení také, ale na kalkulačce dělili místo dvěma čtyřmi, prohodili číslice v jednom z mezivýsledku) – dva žáci,
- použili špatný vzorec pro výpočet obsahu podstavy a v důsledku toho měli i špatně výpočet povrchu jehlanu – jeden žák,
- špatný vzorec pro výpočet obsahu pláště a v důsledku toho měli i špatně výpočet povrchu jehlanu – tři žáci.

Jeden bod získalo osm žáků. Tito žáci udělali jednu z následujících možných chyb:

- špatně vypočítali stěnovou výšku (zapomněli počítat s polovinou podstavné hrany) a v důsledku toho měli špatně obsah pláště i celý povrch jehlanu – pět žáků,

- špatně vypočítali stěnovou výšku (špatně si určili přeponu) a v důsledku toho měli špatně obsah pláště i celý povrch jehlanu – dva žáci,
- zaměnili tělesovou výšku za stěnovou – jeden žák.

V „klasické“ třídě získalo nulu šest žáků, z toho dva úlohu neřešili a zbylí žáci neuměli vzorce. Plný počet bodů získal pouze jeden žák. Tři body žádný žák nezískal. Jedna žákyně získala dva body. Vzorec pro výpočet obsahu jednoho trojúhelníku měla správně, ale po dosažení čísel dělila místo dvojkou trojkou, viz obrázek 9.



Obrázek 9

Jeden bod získalo patnáct žáků. Žáci udělali některou z chyb:

- špatně vypočítali stěnovou výšku (zapomněli počítat s polovinou podstavné hrany) a v důsledku toho měli špatně obsah pláště i celý povrch jehlanu – dva žáci,
- špatně vypočítali stěnovou výšku (špatně si určili přeponu) a v důsledku toho měli špatně obsah pláště i celý povrch jehlanu – tři žáci
- špatně vypočítali stěnovou výšku (nezná správné znění Pythagorovy věty) a v důsledku toho měli špatně obsah pláště i celý povrch jehlanu – jeden žák
- zaměnili tělesovou výšku za stěnovou – šest žáků,
- neuměli vzorec pro výpočet obsahu pláště – tři žáci.

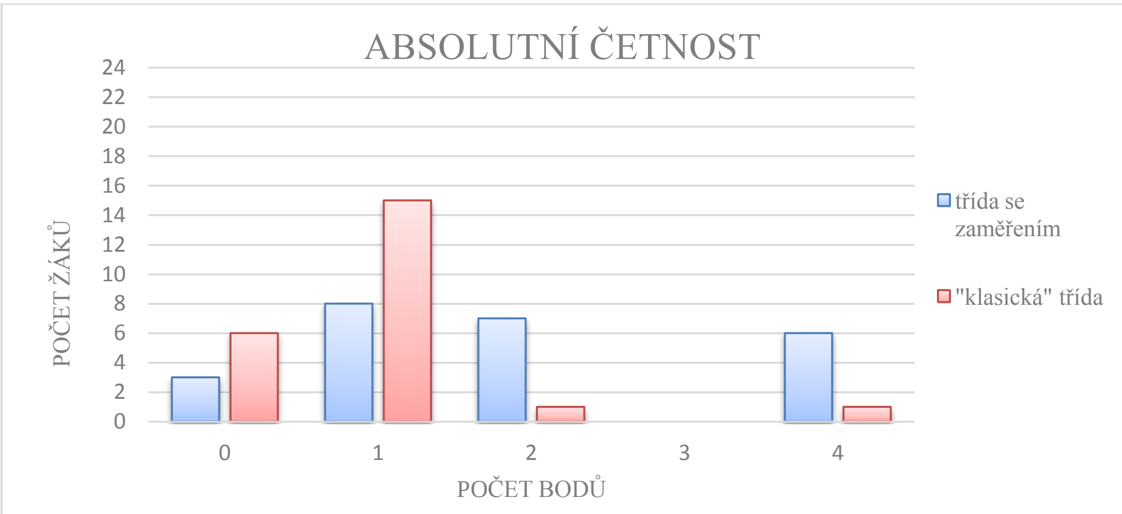
Výsledky jsem zpracovala do níže uvedených tabulek a grafů, ve kterých jsou vidět rozdíly mezi třídami. Absolutní četnost je počet žáků dle dosaženého počtu bodů v úloze. Relativní četnost je procentuálně vyjádřený počet žáků dle dosaženého počtu bodů v úloze. Hodnoty z tabulky 3 jsou zobrazeny v přehledných grafech 4, 5, 6.

V tabulce 4 jsou uvedeny další statické údaje, ze kterých jsou patrné rozdíly mezi jednotlivými třídami.

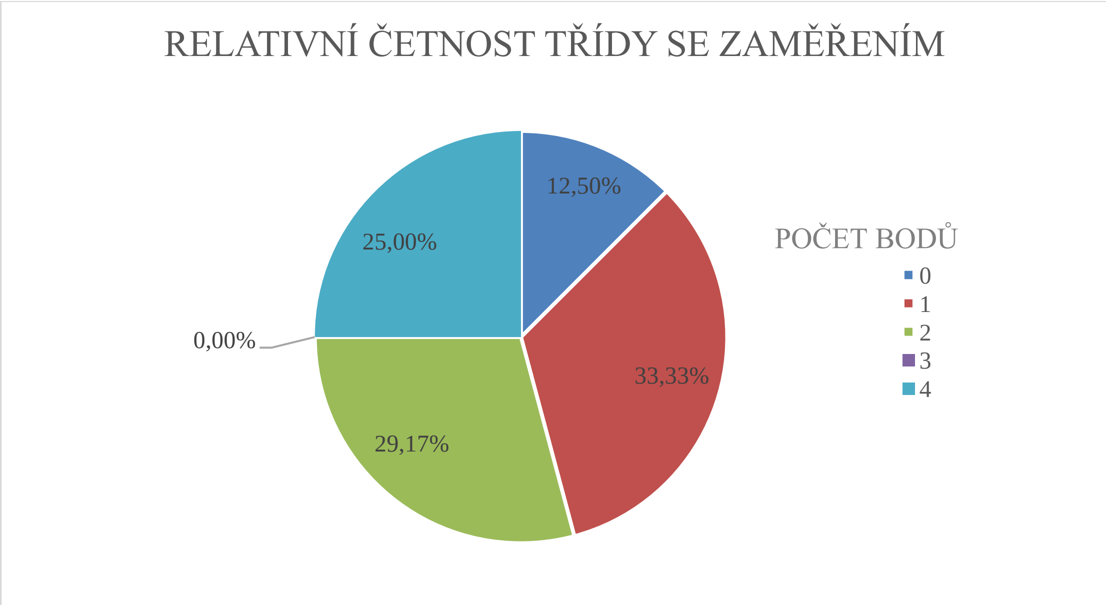
Tabulka 3: Počet získaných bodů – absolutní, relativní četnost

2. úloha						
počet bodů		0	1	2	3	4
absolutní četnost	třída se zaměřením	3	8	7	0	6
	"klasická" třída	6	15	1	0	1
relativní četnost [%]	třída se zaměřením	12,50	33,33	29,17	0,00	25,00
	"klasická" třída	26,09	65,22	4,35	0,00	4,35

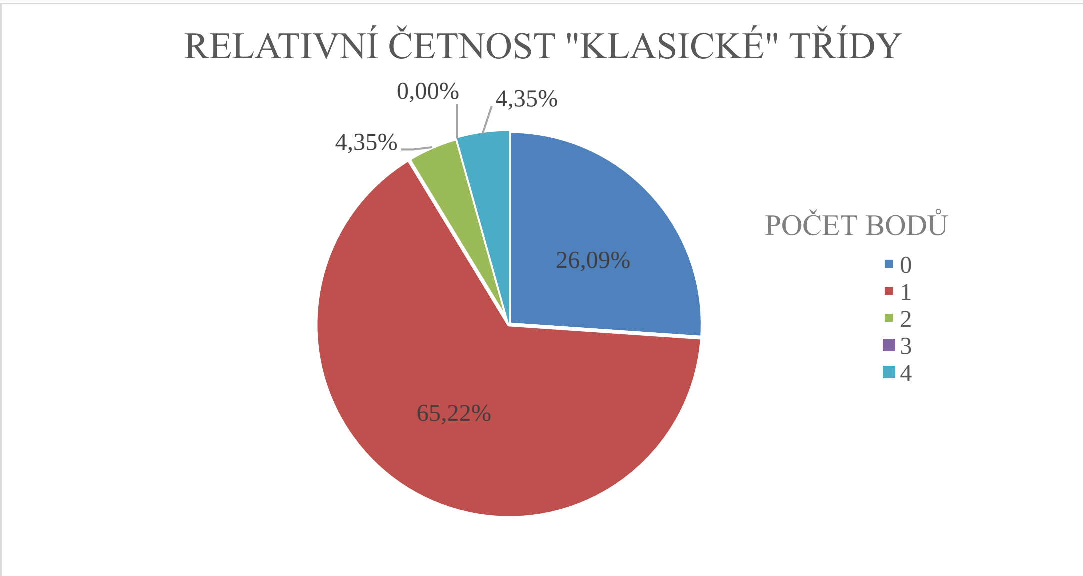
Graf 4: Absolutní četnost



Graf 5: Relativní četnost třídy se zaměřením



Graf 6: Relativní četnost „klasické“ třídy

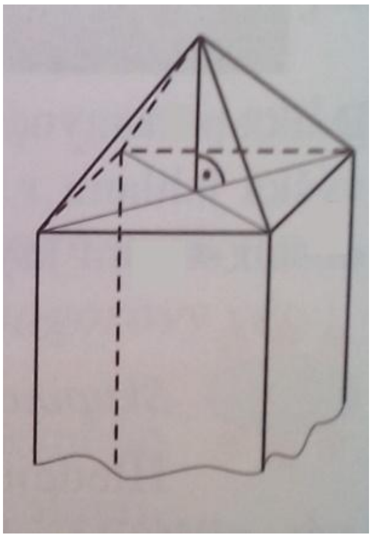


Tabulka 4: Základní statistické údaje

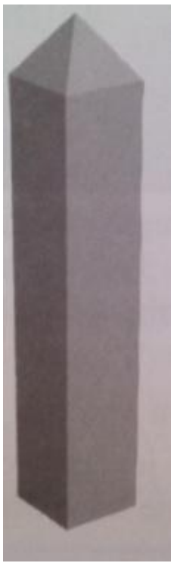
2. úloha - 4 body		
aritmetický průměr	třída se zaměřením	1,92
	"klasická" třída	0,91
modus	třída se zaměřením	1
	"klasická" třída	1
medián	třída se zaměřením	2
	"klasická" třída	1

9.3. Úloha číslo 3

Vypočítej hmotnost betonového bloku, jehož spodní část tvoří pravidelný čtyřboký hranol a vrchní část pravidelný čtyřboký jehlan, viz obrázek 10, 11. Délka podstavné hrany je 60 cm. Betonový blok je vysoký $3,4$ m, přičemž výška spodní části bloku je 3 m. Hustota betonu je $2\,100$ kg/m^3. (inspirováno Rosecká, 2002, s. 64)



Obrázek 10



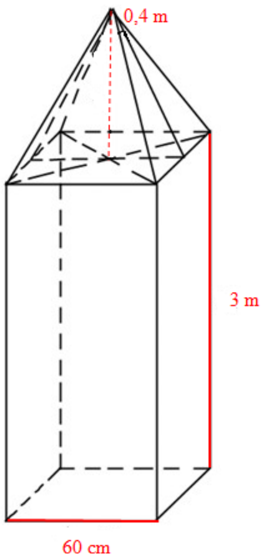
Obrázek 11

Třetí úlohu bych již zařadila mezi obtížnější úlohy. Vyskytuje se zde těleso složené ze dvou částí. Jednu část tvoří pravidelný čtyřboký jehlan, který žáci probírali v tomto ročníku. Druhou část tvoří pravidelný čtyřboký hranol, jenž byl probírán již v předchozím ročníku, a žáci by tudíž látku měli znát. K této úloze je zapotřebí znát nejen vzorec na výpočet objemu, ale i na výpočet hmotnosti. Tyto vzorce spolu úzce souvisejí.

Žáci by si měli uvědomit, že hustota je poměr hmotnosti tělesa k jeho objemu. Dále musí dopočítat výšku jehlanu. A také musí před dosazením do vzorce převést údaje do stejných jednotek.

Správné řešení:

Náčrtek:



Obrázek 12

$v = 3{,}4 \text{ m}$

$v_h = 3 \text{ m}$

$v_j = 0{,}4 \text{ m}$

$a = 60 \text{ cm} = 0{,}6 \text{ m}$

$\rho = 2\,100 \text{ kg/m}^3$

$m = ?\,\text{kg}$

$V_h = S_p v_h$

$V_h = a^2 v_h$

$V_h = 0{,}6^2 \times 3 \text{ m}^3$

$V_h = 1{,}08 \text{ m}^3$

$V_j = \frac{1}{3} S_p v_j$

$V_j = \frac{1}{3} a^2 v_j$

$V_j = \frac{1}{3} \times 0{,}6^2 \times 0{,}4 \text{ m}^3$

$V_j = 0{,}048 \text{ m}^3$

$V = V_h + V_j$

$V = 1{,}08 + 0{,}048 \text{ m}^3$

$V = 1{,}128 \text{ m}^3$

$m = \rho V$

$m = 2\,100 \times 1{,}128 \text{ kg}$

$m = 2\,368{,}8 \text{ kg} \cong 2{,}4 \text{ t}$

Hmotnost betonového bloku je přibližně 2,4 t.

Za tuto úlohu žáci mohli získat maximálně 5 bodů. Za každý výpočet dostali bod a zde jsem dávala i bod, když věděli, jak úlohu vypočítat, ale výsledek měli špatně. Toho hodnocení jsem zvolila po konzultaci s učitelkami matematiky obou tříd a také protože se již jedná o obtížnější úlohu.

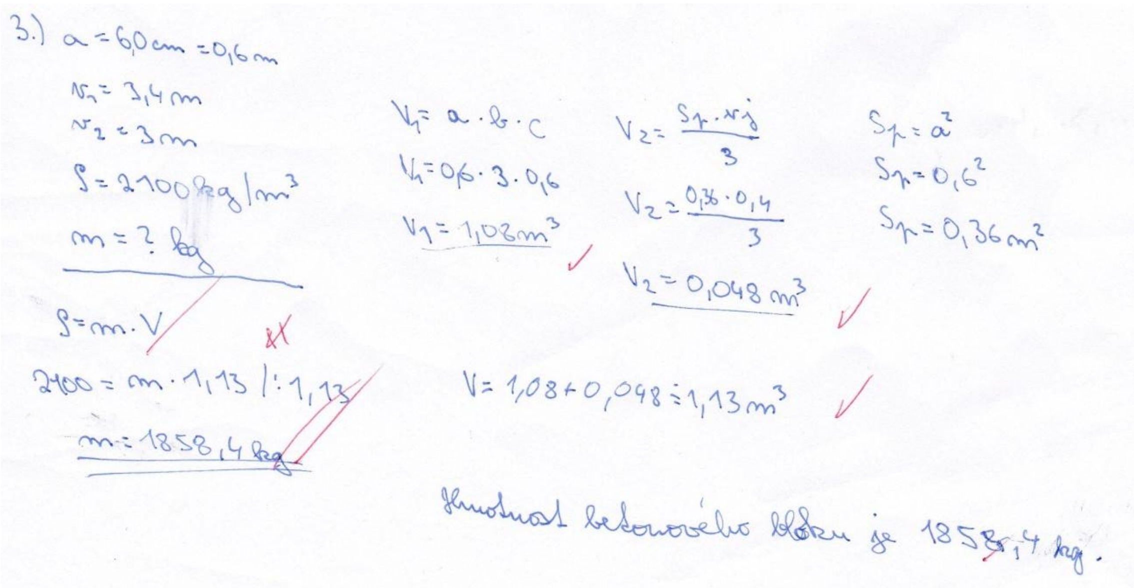
Domnívám se, že v této úloze by mohli žáci udělat tyto chyby:

- nebudou znát vzorec pro objem hranolu,
- nebudou znát vzorec pro objem jehlanu,
- nebudou znát vzorec pro výpočet hmotnosti,
- zapomenou převést jednotky,

- použijí špatnou výšku (jehlanu, hranolu),
- udělají během výpočtu numerickou chybu.

9.3.1. Analýza žákovských řešení

Nula bodů ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů dostalo pět žáků, z toho tři žáci tuto úlohu neřešili. Zbylí dva žáci neuměli vzorce. Plný počet bodů získalo jedenáct žáků. Čtyři body získala žákyně, která spletla vzorec pro výpočet hmotnosti. Hmotnost tělesa se vypočítá, když hustotu látky vynásobíme objemem tělesa, ale žákyně hustotu látky dělila objemem tělesa, viz obrázek 13.



Obrázek 13

Tři body získal také jeden žák. Žák věděl, jak tuto úlohu počítat, bohužel udělal chybu při převodu jednotek. Dva body získali čtyři žáci, tito žáci udělali některou z chyb:

- numerickou chybu (přepsali špatně výsledek z kalkulačky) – dva žáci,
- neuměl vzorec pro objem hranolu – jeden žák,
- použili špatnou výšku – jeden žák.

Jeden bod získaly dvě žákyně, jedna ze žákyň počítala místo obsahu podstavy obvod podstavy, tuto chybu udělala již u předchozí úlohy. Druhá žákyně neuměla vzorec pro výpočet objemu jehlanu.

Z „klasické“ třídy získalo nula bodů devatenáct žáků, z toho úlohu vůbec neřešilo šestnáct žáků. Zbylí tři žáci neuměli vzorce. Pět, čtyři a tři body nezískal nikdo. Jeden žák získal dva body, během výpočtu špatně převedl jednotky a neměl správně vzorec pro výpočet hmotnosti. Tři žáci získali jeden bod. Žáci udělali při řešení úlohy více než jednu chybu:

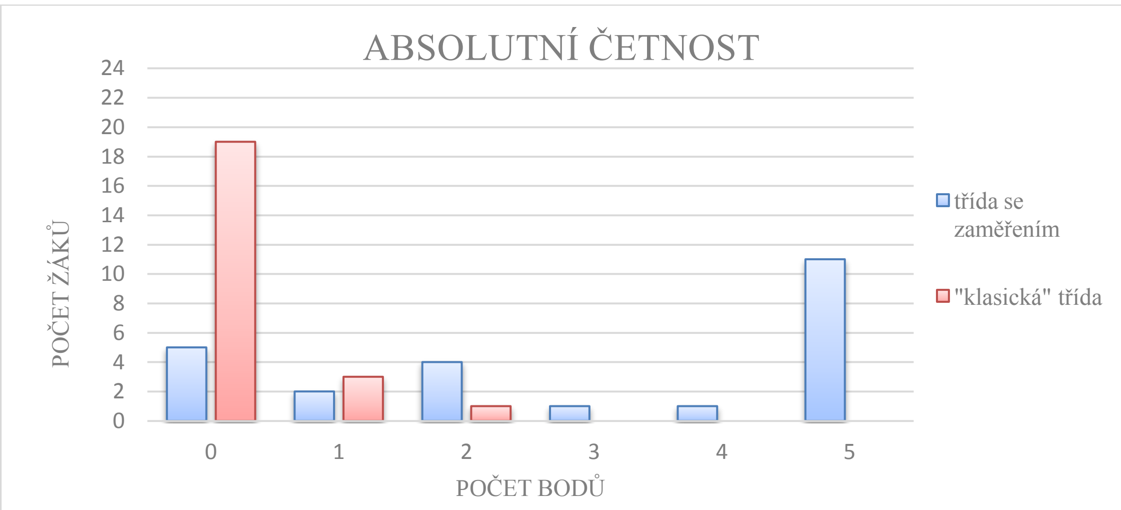
- špatně převedli – tři žáci,
- neuměli výpočet pro objem jehlanu nebo hranolu – dva žáci
- neměli dobře vzorec pro výpočet hmotnosti – jeden žák.

Výsledky jsem zpracovala do následujících tabulek a grafů, ve kterých jsou vidět rozdíly mezi třídami. Absolutní četnost je počet žáků dle dosaženého počtu bodů v úloze. Relativní četnost je procentuálně vyjádřený počet žáků dle dosaženého počtu bodů v úloze. Hodnoty z tabulky 5 jsou zobrazeny v přehledných grafech 7, 8, 9. V tabulce 6 jsou uvedeny další statické údaje, ze kterých jsou patrné rozdíly mezi jednotlivými třídami.

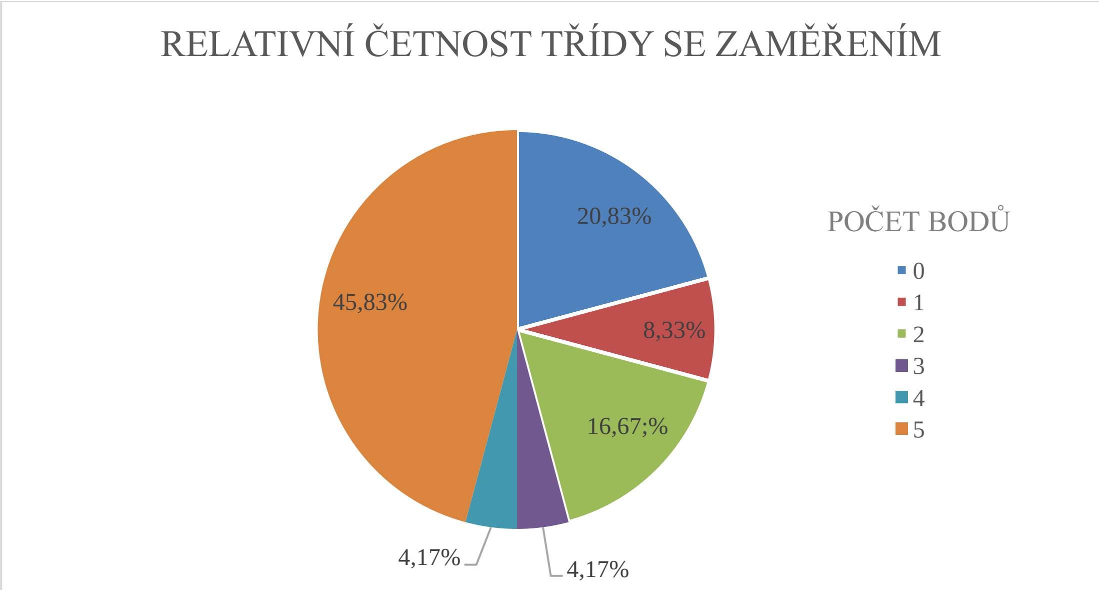
Tabulka 5: Počet získaných bodů – absolutní, relativní četnost

3. úloha							
počet bodů		0	1	2	3	4	5
absolutní četnost	třída se zaměřením	5	2	4	1	1	11
	"klasická" třída	19	3	1	0	0	0
relativní četnost [%]	třída se zaměřením	20,83	8,33	16,67	4,17	4,17	45,83
	"klasická" třída	82,61	13,04	4,35	0,00	0,00	0,00

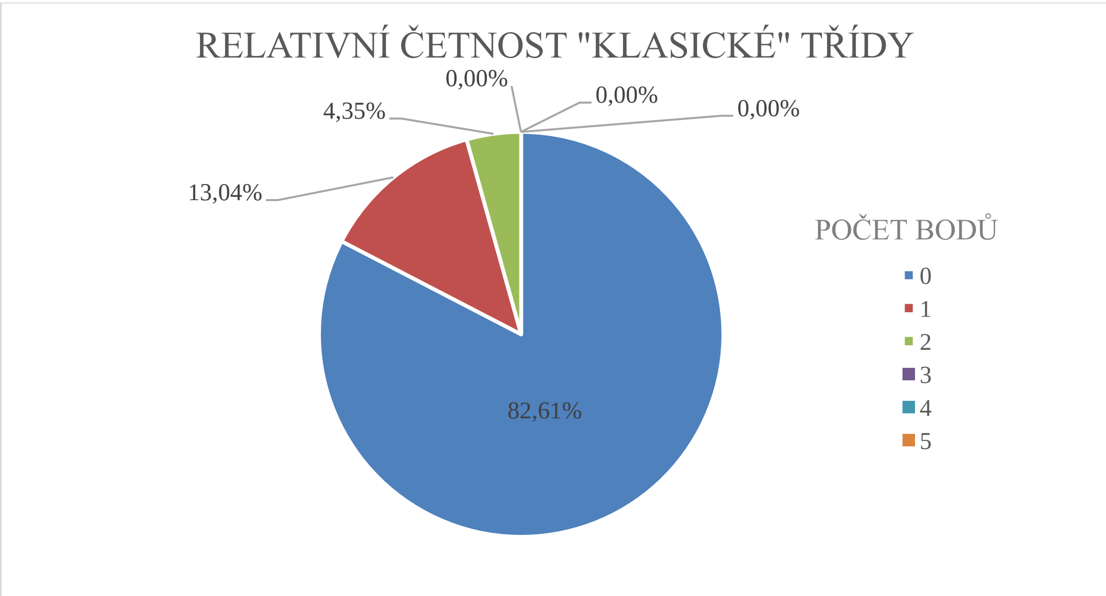
Graf 7: Absolutní četnost



Graf 8: Relativní četnost třídy se zaměřením



Graf 9: Relativní četnost „klasické“ třídy



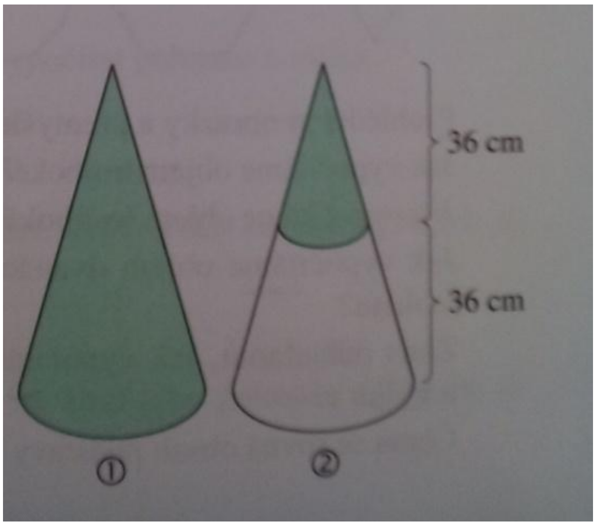
Tabulka 6: Základní statistické údaje

3. úloha - 5 body		
aritmetický průměr	třída se zaměřením	3
	"klasická" třída	0,22
modus	třída se zaměřením	5
	"klasická" třída	0
medián	třída se zaměřením	3,5
	"klasická" třída	0

9.4. Úloha číslo 4

Firma opravující silnice chce pro zvýšení bezpečnosti opatřit výstražné kužele, kterými usměrňuje provoz, reflexním nátěrem. Výstražný kužel je dutý výlisek, který má tvar kužele bez podstavy s průměrem 42 cm a výškou 72 cm. Firma zvažuje dvě varianty nátěru:

1) **opatří nátěrem celý kužel**
2) **natře pouze horní polovinu kužele.**



Obrázek 14

a. **Učeň Václav odhaduje, že se při variantě 2) sníží spotřeba barvy o 50 %. Je Vaškův odhad správný?**
   - **A. ANO**
   - **B. NE**

b. **Jak velká plocha se bude na jednom kuželu natírat při variantě 1)?**
   - **A.** $6\,330$ **cm²**
   - **B.** $49{,}46$ **m²**
   - **C.** $4\,946$ **cm²**
   - **D.** $63{,}3$ **m²**
   - **E.** **ani jedna odpověď není správně. Správně je………………..**

c. **Jak velká plocha se bude na jednom kuželu natírat při variantě 2)?**

- **A.** $\mathbf{1\,236}$ **cm^2**
- **B.** $\mathbf{1\,583}$ **cm^2**
- **C.** $\mathbf{158,3}$ **dm^2**
- **D.** $\mathbf{123,6}$ **dm^2**
- **E.** **ani jedna odpověď není správně. Správně je………………..**

d. **O kolik procent je nižší spotřeba barvy při variantě 2) než při variantě 1)?**

- **A.** **O** $\mathbf{25}$ %
- **B.** **O** $\mathbf{50}$ %
- **C.** **O** $\mathbf{75}$ %
- **D.** **Ani jedna odpověď není správně. Správně je ……………….**

(inspirováno Odvárko, 2001, s. 21)

Čtvrtou úlohu řadím mezi obtížnější úlohy. K jednomu zadání se vztahuje několik otázek. Text zadání je stejně jako u předchozí úlohy delší. Některým žákům by se mohla úloha zdát méně přehledná.

Předpokládám, že někteří žáci budou odpovědi tipovat, zejména žáci z „klasické“ třídy. První otázka je na odhad. Odpovědi na další otázky mohou žáci vypočítat nebo pomocí výpočtu ověřit své tipy.

Správné řešení:

a) Správná odpověď je B.

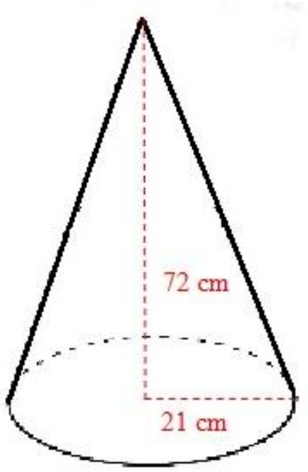
b) $d = 42$ cm

$r = 21$ cm

$v = 72$ cm

$S_{pl} = ?$ cm^2

Náčrtek:



Obrázek 15

$s^2 = v^2 + r^2$

$s^2 = 72^2 + 21^2 \text{ cm}^2$

$s = \sqrt{5\,625} \text{ cm}$

$\underline{\underline{s = 75 \text{ cm}}}$

$S_{pl} = \pi r s$

$S_{pl} = 3{,}14 \times 21 \times 75 \text{ cm}^2$

$\underline{\underline{S_{pl} = 4\,945{,}5 \text{ cm}^2 \cong 4\,946 \text{ cm}^2}}$

Správná odpověď je C.

c) $d = 42 \text{ cm}$

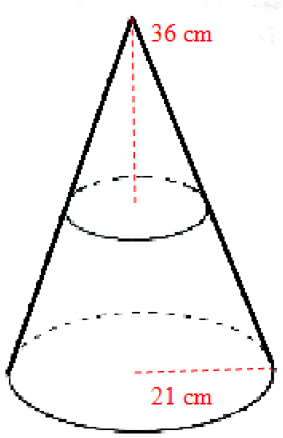
$r = 21 \text{ cm}$

$v = 72 \text{ cm}$

$v' = 36 \text{ cm}$

$\underline{S'_{pl} = ? \text{ cm}^2}$

Náčrtek:



Obrázek 16

$\frac{r}{v} = \frac{r'}{v'}$

$\frac{21}{72} = \frac{r'}{36}$

$r' = \frac{36 \times 21}{72} \text{ cm}$

$\underline{\underline{r' = 10{,}5 \text{ cm}}}$

$s'^2 = v'^2 + r'^2$

$s'^2 = 36^2 + 10{,}5^2 \text{ cm}^2$

$s' = \sqrt{1\,406{,}25} \text{ cm}$

$\underline{\underline{s' = 37{,}5 \text{ cm}}}$

$S'_{pl} = \pi r' s'$

$S'_{pl} = 3{,}14 \times 10{,}5 \times 37{,}5 \text{ cm}^2$

$\underline{\underline{S'_{pl} = 1\,236 \text{ cm}^2}}$

Správná odpověď je A.

d) $4\,946 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots 100\ \%$

$1\,236 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots x\ \%$

$x = \frac{1\,236}{4\,946} \times 100$ $\qquad\qquad$ $100\ \% - 25\ \% = 75\ \%$

$x \cong 25\ \%$

Správná odpověď je C.

Za tuto úlohu žáci mohli získat maximálně 7 bodů. Jeden bod získali za každou správnou odpověď, tedy čtyři body, a navíc mohli získat celkem další tři body, když u otázek b), c), d) měli výpočet. Před začátkem testu jsem žáky upozornila, že u této úlohy získávají body i za výpočty.

Předpokládala jsem, že by v této úloze mohli žáci udělat tyto chyby:

- špatně odhadnou, zda má Vašek pravdu,
- pouze si tipnou správnou odpověď,
- nebudou znát vzorec pro povrch pláště,
- budou za b) a c) počítat celý povrch kuželu,
- nebudou vědět jak dopočítat velikost poloměru, strany v c),
- budou uvažovat skutečnou spotřebu u 1. a 2. varianty, ale neodpoví na otázku, o kolik je spotřeba nižší,
- udělají během výpočtu numerickou chybu.

9.4.1. Analýza žákovských řešení

Ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů získala nula bodů jedna žákyně. Žákyně u otázky a) špatně odhadla, zda má Vašek pravdu, v b), c) počítala v obou případech celý povrch jehlanu a v poslední otázce, tedy v d), zakroužkovala možnost B. Plný počet sedm bodů získalo šest žáků. Dva žáci získali šest bodů. Žáci odpověď na poslední otázku tipli, chyběl výpočet. Jeden žák dostal pět bodů, na první otázku odpověděl správně, na druhou také a odpověď podložil výpočtem a zbylé dvě odpovědi tipnul (chyběli mu výpočty). Čtyři body získal také jeden žák, na první otázku odpověděl správně, na druhou také a odpověď podložil výpočtem, další pouze tipnul (chyběl mu výpočet) a na poslední otázku neodpověděl. Tři body získalo šest žáků. Tito žáci odpovídali takto:

- odpověděli pouze na první a druhou otázku (druhou otázku doložili výpočtem) – jeden žák
- odpověděli správně na první a poslední otázku (nechyběl výpočet), ale na druhou a třetí odpověděli špatně (počítali celý povrch jehlanu a ne povrch pláště) – čtyři žáci
- tipl si tři otázky (bez výpočtu) – jeden žák

Dva žáci získali dva body. Tito žáci tipli dvě otázky (první a poslední). Pět žáků získalo jeden bod. Dva žáci odpověděli pouze na jednu otázku, tři žáci měli správně pouze jednu odpověď. Ti, kteří odpověděli správně na jednu otázku, udělali některou z chyb:

- počítali špatně povrch kužele – dva žáci
- špatně tipovali odpověď – jeden žák

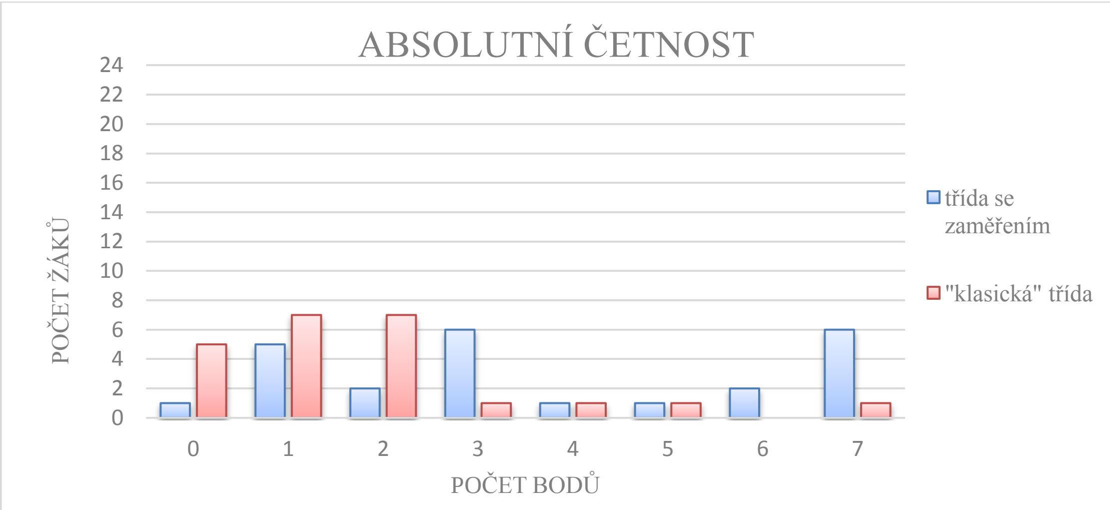
V „klasické" třídě získalo nula bodů pět žáků, z toho jeden žák tuto úlohu neřešil. Zbylí žáci si buď špatně tipli, nebo úlohu špatně vypočítali. Plný počet bodů získala jedna žákyně. Šest bodů nikdo nezískal. Pět bodů získala jedna žákyně. Tato žákyně měla vše dobře, kromě poslední odpovědi, tu pouze tipla a špatně. Jedna žákyně získala čtyři body, tato žákyně řešila správně pouze druhou a třetí otázku. Tři body také získala jedna žákyně. Žákyně odpovídala pouze na první a druhou otázku. Obě odpovědi měla správně. Sedm žáků mělo dva body. Tito žáci nejčastěji jenom tipovali správné odpovědi. Buď tipovali dvě odpovědi správně, nebo udělali chybu u druhé a třetí otázky (počítali celý povrch jehlanu) a na poslední otázku odpověděli špatně. Jeden bod mělo také sedm žáků. Tito žáci buď tipli správně jeden výsledek, nebo se snažili úlohu řešit, ale udělali chyby ve výpočtech (neuměli vzorce, počítali celý povrch, neuměli vypočítat procenta u poslední otázky).

Výsledky jsem zpracovala do následujících tabulek a grafů, ve kterých jsou vidět rozdíly mezi třídami. Absolutní četnost je počet žáků dle dosaženého počtu bodů v úloze. Relativní četnost je procentuálně vyjádřený počet žáků dle dosaženého počtu bodů v úloze. Hodnoty z tabulky 7 jsou zobrazeny v přehledných grafech 10, 11, 12. V tabulce 8 jsou uvedeny další statické údaje, ze kterých jsou patrné rozdíly mezi jednotlivými třídami.

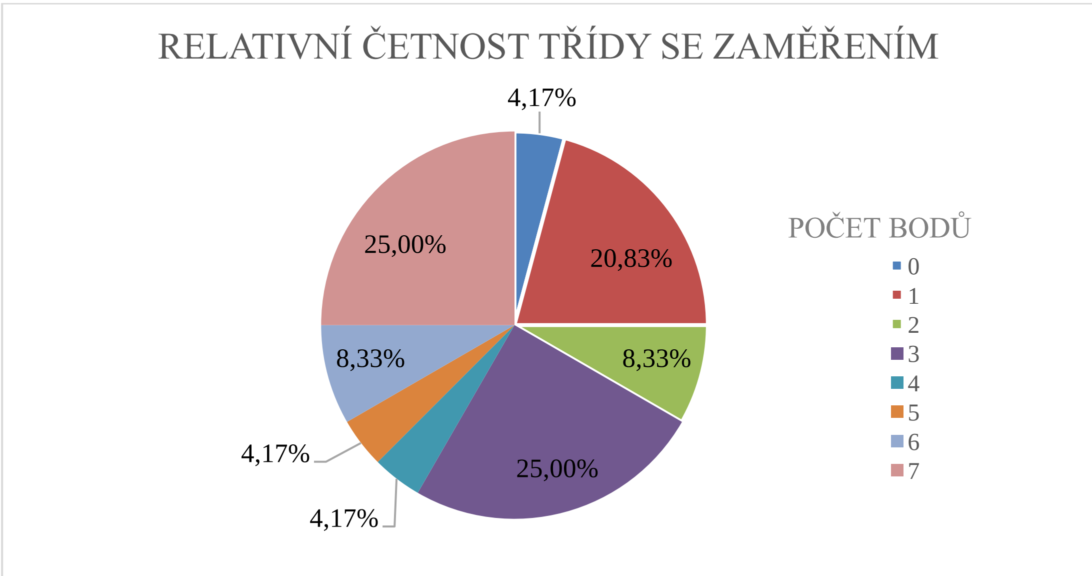
Tabulka 7: Počet získaných bodů – absolutní, relativní četnost

4. úloha									
počet bodů		0	1	2	3	4	5	6	7
absolutní četnost	třída se zaměřením	1	5	2	6	1	1	2	6
	"klasická" třída	5	7	7	1	1	1	0	1
relativní četnost [%]	třída se zaměřením	4,17	20,83	8,33	25,00	4,17	4,17	8,33	25,00
	"klasická" třída	21,74	30,43	30,43	4,35	4,35	4,35	0,00	4,35

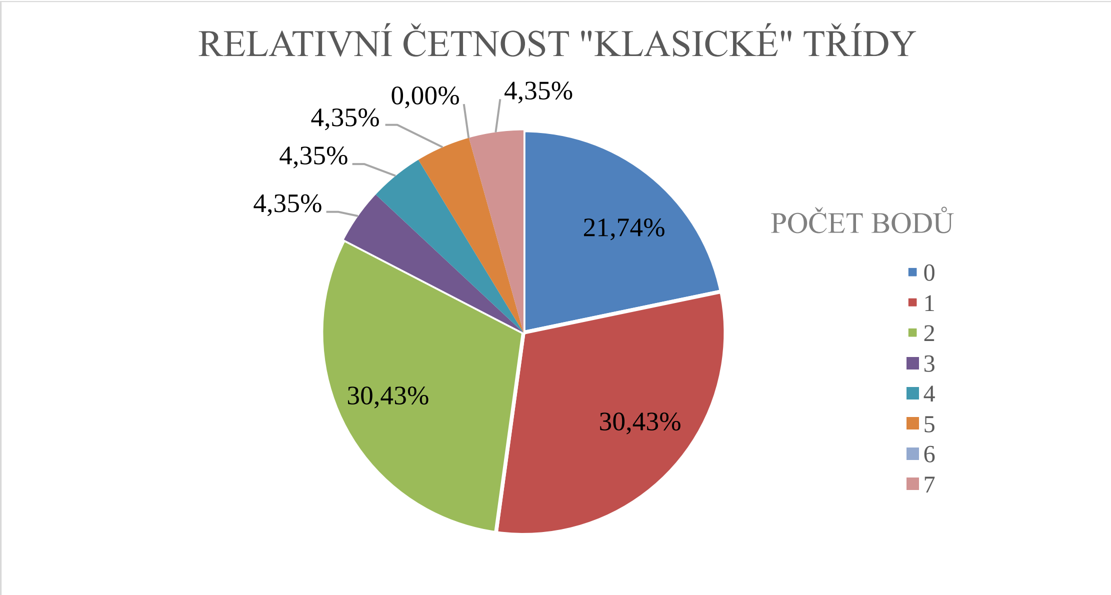
Graf 10: Absolutní četnost



Graf 11: Relativní četnost třídy se zaměřením



Graf 12: Relativní četnost „klasické“ třídy



Tabulka 8: Základní statistické údaje

4. úloha - 7 body		
aritmetický průměr	třída se zaměřením	3,75
	"klasická" třída	1,74
modus	třída se zaměřením	7 a 3
	"klasická" třída	2 a 1
medián	třída se zaměřením	3
	"klasická" třída	1

9.5. Závěr šetření

Šetření se zúčastnili žáci dvou tříd devátého ročníku ZŠ Amálská. Celkem se šetření zúčastnilo 47 žáků, 24 žáků ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů a 23 žáků z „klasické“ třídy.

V testu mohli žáci získat maximálně 18 bodů za všechny správně vyřešené úlohy. Z tabulky 9 je zřejmé, kolik žáků dosáhlo konkrétního počtu bodů. Nejvíce žáků, teda čtyři, ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů dosáhlo hranice pěti bodů. V „klasické“ třídě byl nejčastější dosažený počet bodů tři body, jež získalo šest žáků. Naopak žádný žák ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů nezískal nula, dva, tří a šest bodů, tedy žáci v této třídě bez těchto hodnot obsadili kompletní bodovou škálu. V „klasické“ třídě nezískal nikdo z žáků nula, osm, devět, dvanáct a více bodů. Vážený průměr získaných bodů třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů odpovídá deseti bodům. V „klasické“ třídě vážený průměr dosažených bodů odpovídá čtyřem bodům. Tedy třída se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů získala 2,5x více bodů než třída „klasická“.

Tabulka 9: Počty dosažených bodů v jednotlivých třídách.

absolutní četnost žáků	Celkový počet dosažených bodů																		
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**
ve třídě se zaměřením	0	1	0	0	1	4	0	1	2	1	2	2	1	2	1	1	3	1	1
v "klasické" třídě	0	2	3	6	4	2	3	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Z následujících tabulek (Tabulka 10, Tabulka 11) můžeme vyčíst, kolik bodů z maximálně možných za každou úlohu třída získala a jaká byla úspěšnost u jednotlivých úloh a celková úspěšnost třídy. Úspěšností se rozumí procentuální vyjádření získaných bodů vztažených k maximu bodů.

Tabulka 10: Počet dosažených bodů a úspěšnost u jednotlivých úloh a celková úspěšnost žáku ze třídy se zaměřením.

TŘÍDA SE ZAMĚŘENÍM NA ROZŠÍŘENOU VÝUKU MATEMATIKY A PŘIRODOVĚDNÝCH PŘEDMĚTŮ					
body	1. úloha	2. úloha	3. úloha	4. úloha	celkem
maximální počet	48	96	120	168	432
dosažený počet	41	46	72	90	249
úspěšnost v %	85,42	47,92	60,00	53,57	57,64

Tabulka 11: Počet dosažených bodů a úspěšnost u jednotlivých úloh a celková úspěšnost žáků z „klasické“ třídy

"KLASICKÁ" TŘÍDA					
body	1. úloha	2. úloha	3. úloha	4. úloha	celkem
maximální počet	46	92	115	161	414
dosažený počet	29	21	5	40	95
úspěšnost v %	63,04	22,83	4,35	24,84	22,95

Jak je vidět z tabulek, žáci ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů byly v každé úloze úspěšnější než žáci z „klasické“ třídy.

Při tvorbě testu byl můj předpoklad takový, že vzájemné rozdíly ve výsledcích testovaných tříd v jednoduchých úlohách (1. a 2. úloha) budou minimální. Má domněnka se přímo nepotvrdila, jak je patrné ve výsledcích v tabulkách 10 a 11. Hned u první úlohy v připraveném testu je patrný rozdíl v úspěšnosti mezi třídami 22,38 %, ve druhé dokonce 25,09 %. Což se jeví jako poměrně velký rozdíl, vezmeme-li v potaz fakt, že se jedná o typy úloh, které v hodinách procvičovali všichni žáci se svými vyučujícími, zhruba ve stejném rozsahu.

Nejmarkantnější rozdíl úspěšnosti nastal u 3. úlohy. Dalo se očekávat, že žáci ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů tuto úlohu vyřeší úspěšněji. Ovšem co mě opravdu překvapilo, byl fakt, že šestnáct žáků z „klasické“ třídy, ve které test řešilo třiadvacet žáků, úlohu vůbec neřešilo. Protože takový počet žáků úlohu neřešil, byla úspěšnost velmi nízká, pouze 4,35 %. Po opravení testů jsem měla informativní rozhovor s žáky „klasické“ třídy, abych zjistila, jaký byl důvod, proč úlohu vůbec nezačali řešit. Většina žáků mi odpověděla, že nevěděli vzorec pro výpočet hmotnosti a tři žáci nevěděli vzorec pro výpočet objemu pravidelného čtyřbokého hranolu.

Úloha číslo 4 sloužila mimo jiné ke zjištění skutečnosti, jestli se žáci pokusí o výpočet, aby získali více bodů, nebo svou odpověď pouze otipují a dobrovolně se o body připraví. Většina žáků ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů úlohu vypočítala a na základě výpočtu zvolili jednu z odpovědí. Třináct žáků z „klasické“ třídy své odpovědi tipovali. Po rozhovoru se žáky z „klasické“ třídy jsem zjistila, že se jim úlohy nechtěli počítat, a že budou mít méně bodů, jim nevadilo. Z toho vyplývá i relativně nízká úspěšnost této třídy.

Pro zajímavost jsem si v každé třídě zapisovala časy, kdy žáci odevzdali svojí práci. Původně jsem si chtěla ověřit, zda žáci ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů test vyřeší dříve než za stanových 45 minut. Dříve než nejrychlejší žáci ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů práce začali odevzdávat žáci z „klasické“ třídy. Devět žáků z „klasické“ třídy test odevzdalo po půl hodině, ale ani jeden z nich nevypočítal všechny úlohy. Většina měla vypočítanou první úlohu a u čtvrté úlohy skoro všichni tipovali odpovědi. První tři žáci ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů odevzdali test po pětatřiceti minutách, ale ti měli vyřešeny již všechny úlohy.

Dále jsem se ještě zaměřila na to, v jakém pořadí dané úlohy testu žáci řešili. Dvacet žáků ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů odpovědělo na všechny otázky. Z toho šestnáct žáků řešilo dané úlohy popořadě. Dva žáci vynechali jednu úlohu, jeden z nich vynechal 2. úlohu a druhý vynechal 3. úlohu. Jeden žák vynechal dvě úlohy, a to 1. a 3. úlohu. Jeden žák řešil pouze jednu úlohu, a to 4. úlohu. V „klasické“ třídě odpovědělo na všechny úlohy pouze pět žáků, ale ne všichni správně, tři žáci řešili úlohy popořadě. Zbylí dva žáci řešili úlohy v tomto pořadí: 1. úloha, 4. úloha, 2. úloha, 3. úloha. Třináct žáků odpovědělo na tři úlohy. Z těchto žáků osm začínalo 1. úlohou a následovala úloha 4. Čtyři žáci odpověděli na dvě úlohy (4. úloha a 1. úloha) a zde také jeden žák odpověděl pouze na jednu úlohu, a to 1. úlohu.

Při analýze žákovských řešení jsem odhalila, že žáci z obou tříd řešili úlohy podobně. Nejprve si ze zadání vypsali údaje potřebné k řešení úlohy, následně připsali obecný vzorec pro daný výpočet a dosadili do něj konkrétní hodnoty. Tímto standardním postupem se žákům podařilo vyřešit téměř všechny úlohy bez ohledu na to, z jaké byli třídy. Zajímavé zjištění plynoucí z analýzy testů tříd bylo, že žáci, kteří nevěděli vzorec potřebný pro výpočet objemu či povrchu zpaměti, jej žádným způsobem nedokázali a ani nezkoušeli odvodit. Žáci ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů si dokázali propojit učivo z fyziky s matematikou (úloha 3), či si alespoň uměli odvodit vzorec z jednotek. Tyto mezipředmětové vazby jsem u „klasické“ třídy postrádala.

Další zajímavostí plynoucí z analýzy bylo, že žáci, kteří patří mezi nejlepší žáky v matematice v rámci obou tříd, dle rozhovoru s vyučujícími matematiky, vyřešili test s průměrnou úspěšností, zatímco běžně průměrní žáci vyřešili test nadprůměrně. Domnívám se, že průměrní žáci nevěnují přípravě před ohlášeným testem takovou péči jako nejlepší žáci v matematice, a proto je nezaskočí nečekaná událost, jako byl tento neohlášený test. Tudíž někteří žáci, kteří si vedou v matematice dobře, nedopadli úplně nejlépe a naopak. Také se mi potvrdila i domněnka, že žáci již přijatí na střední školy ve své studijní píli poleví, což je jednoznačně způsobeno nízkou motivací.

Závěr

Ve své diplomové práci jsem se zabývala řešením úloh o objemu a povrchu jehlanu a kužele. Cílem práce bylo sestavit vlastní didaktický test a analyzovat postupy řešení matematických úloh u žáků devátého ročníku ZŠ Amálská, porovnat výsledky dosažené v testu u žáků ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů s žáky z „klasické“ třídy a zjistit míru úspěšnosti u žáků ze třídy se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů a žáků z „klasické“ třídy při řešení matematických úloh.

Svůj cíl jsem splnila. Vytvořila jsem vlastní didaktický test, který jsem zadala ve dvou 9. třídách. Výsledky a postupy řešení jsem analyzovala. Na základě analýzy jsem porovnala dosažené výsledky a míru úspěšnosti obou tříd. Dosažené výsledky jsem pro lepší názornost zpracovala do přehledných tabulek a grafů, míru úspěšnosti jsem zpracovala do tabulek. Fakt, že třída se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů byla úspěšnější při řešení úloh, se dal snadno předpokládat a analýza testů jej také samozřejmě potvrdila. I když jsem předpokládala, že „klasická“ třída bude v úlohách méně úspěšná než třída se zaměřením na rozšířenou výuku matematiky a přírodovědných předmětů, neočekávala jsem, že v jednoduchých úlohách (úloha 1 a 2) bude rozdíl v úspěšnosti tak markantní. Tento rozdíl si vysvětluji možná i tím, že pro některé žáky nebyl můj test „důležitý“, neboť nebyl zadáván jejich vyučující matematiky a nebyl hodnocen známkou.

Samotné téma řešení úloh o objemu a povrchu těles je velmi rozsáhlé a zasahující do mnoha oblastí, já jsem si zvolila za cíl zpracovat jen určitou část. Podobné analyzování žákovských řešení a zpracování úloh by bylo možné u ostatních těles i jiných ročníků. Dále by mohlo být zajímavé zjistit, zda si žáci devátých ročníků pamatují látku z ročníků dřívějších. Na tyto otázky bych si ráda odpověděla v budoucnu během své učitelské praxe.

Použitá literatura

BLAŽKOVÁ, Růžena, Květoslava MATOUŠKOVÁ a Milena VAŇUROVÁ.*Kapitoly z didaktiky matematiky: (slovní úlohy, projekty)*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2002, 84 s. ISBN 8021030224.

DIVÍŠEK, J.: Didaktika matematiky pro učitelství 1. stupně ZŠ. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1989, 269 s. Učebnice pro vysoké školy (Státní pedagogické nakladatelství). ISBN 80-042-0433-3.

DLOUHÁ, Michaela. *Úlohy o objemu a povrchu těles v trojrozměrném prostoru*. Praha, 2012. Dostupné také z:https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/77786/. Diplomová práce. UNIVERZITA KARLOVA V PRAZE PEDAGOGICKÁ FAKULTA Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

HEJNÝ, Milan. *Teória vyučovania matematiky 2*. 2. vyd. Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990, 554 s

HEJNÝ, Milan a František KUŘINA. *Dítě, škola a matematika: konstruktivistické přístupy k vyučování*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Portál, 2009, 54 s., příl. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 978-80-7367-397-0.

CHRÁSKA, Miroslav. *Didaktické testy: příručka pro učitele a studenty učitelství*. Brno: Paido, 1999, 91 s. Edice pedagogické literatury. ISBN 80-859-3168-0.

CHRÁSKA, Miroslav. *Metody pedagogického výzkumu: základy kvantitativního výzkumu*. Vyd. 1. Praha: Grada, 2007, 265 s. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-1369-4.

CHROMÁ, Stanislava. *STRATEGIE ŘEŠENÍ SLOVNÍCH ÚLOH ŘEŠITELNÝCH ROVNICEMI*. Praha, 2011. Dostupné také z: https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/78503/. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

KADLČÍKOVÁ, Kateřina. *Komparace řešení matematických úloh u žáků primární školy*. Olomouc, 2010. Dostupné také z: http://theses.cz/id/e8lwzv/?furl=%2Fid%2Fe8lwzv%2F;lang=en. Diplomová práce. Univerzita Palackého v Olomouci, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky.

KNÍŽE, G.: Vztah celku a části při řešení slovních úloh. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1966. Zprávy Výzkumného ústavu pedagogického v Praze.

KOLÁŘ, Zdeněk a Renata ŠIKULOVÁ. *Hodnocení žáků: základy kvantitativního výzkumu*. 2., dopl. vyd. Praha: Grada, 2009, 199 s. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-247-2834-6.

KOŠŤÁLOVÁ, Hana, Šárka MIKOVÁ a Jiřina STANG. *Školní hodnocení žáků a studentů: se zaměřením na slovní hodnocení*. Vyd. 2. Praha: Portál, 2012, 151 s. Pedagogika (Grada). ISBN 978-80-262-0220-2.

KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. 1. vyd. Praha: SPN, 1990, 247 s., obr. příl. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-042-3753-3.

KYRIACOU, Chris, Šárka MIKOVÁ a Jiřina STANG. *Klíčové dovednosti učitele: cesty k lepšímu vyučování*. 2. vyd. Praha: Portál, 2004, 151 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-717-8965-8.

MIKULČÁK, J. a kol.: *Matematické fyzikální a chemické tabulky pro střední školy*. 3. vyd., dotisk. Praha: Prometheus, 2004, 206 s. Pomocné knihy pro žáky. ISBN 80-858-4984-4.

NAVRÁTILOVÁ, Marta. *Úlohy proti toku času na 2. stupni ZŠ*. Praha, 2009. Diplomová práce. Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, Katedra matematiky a didaktiky matematiky. Vedoucí práce Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.

NOVOTNÁ, Jarmila a František KUŘINA. *Analýza řešení slovních úloh: [kapitoly z didaktiky matematiky]*. 2., aktualiz. vyd. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2000, 123 s. Pedagogická praxe (Portál). ISBN 80-729-0011-0.

NOVOTNÁ, Jarmila. CLIL – *Neverbální prostředky komunikace a různé formy reprezentace*. *RVP* [online]. 2011 [cit. 2015-06-23]. Dostupné z WWW: http://clanky.rvp.cz/clanek/k/z/11337/CLIL---MONITOROVANI-VYSLEDKU-A-HODNOCENI-V-MATEMATICE.html/

ODVÁRKO, Oldřich a Jiří KADLEČEK. *Matematika pro 9. ročník základní školy: Jehlan, kužel, koule, finanční matematika*. 2. vyd. Praha: Prometheus, c2001, 80 s. Učebnice pro základní školy (Prometheus). ISBN 80-719-6283-X.

PELIKÁN, Jiří, Šárka MIKOVÁ a Jiřina STANG. *Základy empirického výzkumu pedagogických jevů: cesty k lepšímu vyučování*. 2. vyd. Praha: Karolinum, 1998, 270 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-718-4569-8.

POLÁK, Josef: *Přehled středoškolské matematiky*. 2. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1978, 628 s. Knižnice všeobecného vzdělávání - KOSTKA. ISBN 14-192-78.

POMYKALOVÁ, Eva: *Matematika pro gymnázia*: *stereometrie*. 3.,dotisk. Praha: Prometheus, 2006, 223 s. Učebnice pro střední školy (Prometheus). ISBN 80-719-6178-7.

ROSECKÁ, Zdena a Arnošt MÍČEK. *Geometrie: učebnice pro 9. ročník*. Brno: Nová škola, 2002, 111 s. ISBN 80-728-9020-4.

SCHIMUNEK, Franz-Peter a Jiří KADLEČEK. *Slovní hodnocení žáků*. 1. vyd. Praha: Portál, 1994, 54 s., příl. Pedagogická praxe. ISBN 80-852-8291-7.

SCHINDLER, Radek. *Rukověť autora testových úloh* [online]. Vyd. 1. Praha: Centrum pro zjišťování výsledků vzdělávání, 2006, 86 s. [cit. 2014-11-13]. ISBN 80-239-7111-5.

SLAVÍK, Jan, Šárka MIKOVÁ a Jiřina STANG. *Hodnocení v současné škole: východiska a nové metody pro praxi*. Vyd. 1. Praha: Portál, 1999, 190 s. Pedagogická praxe. ISBN 80-717-8262-9.

TOMEK, Karel. *Úrovně vzdělávacích cílů podle Blooma* [online]. Stařeč, 2005 [cit. 2015-07-14]. Dostupné z:

https://www.google.cz/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=4&ved=0CC8QFjADahUKEwjLxb2N8trGAhUCvxQKHaKXDMs&url=http%3A%2F%2Fwww.pedgym-kv.cz%2Fdata%2Fsoubory%2Fsoubory%2FUrovne_vzdelavacich_cilu_podle_Blooma.doc&ei=mCSlVcuZPIL-UqKvstgM&usg=AFQjCNEvHjoxIb1q4Y6aQTEEDfmidxzbQw&sig2=yc2C-PNb6OeupjP9GT3PsA&cad=rja

TREJBAL, Josef. *Sbírka úloh z matematiky pro 7. ročník základní školy: Pomocná kniha pro žáky*. 1.vyd. Praha: SPN, 1992, 184 s. Učebnice pro základní školy. ISBN 80-042-5671-6.

VYŠÍN, Jan. *Metodika řešení matematických úloh*. 1. vyd. Praha: SPN, 1962, 170 s. Na pomoc učiteli (Státní pedagogické nakladatelství).

VYŠÍN, Jan. *Metodika řešení matematických úloh*. 2. dopl. vyd. Praha: SPN, 1972, 193 s. Matematická knižnice.

ŽENATÁ, Emílie a Arnošt MÍČEK. *Přehled učiva matematiky: pro 6.-9. ročník ZŠ a víceletá gymnázia s příklady a řešením*. [2. vyd.]. Benešov: Blug, 2010, 552 s. ISBN 978-80-7274-014-7.

Seznam příloh

Příloha 1: Úrovně vzdělávacích cílů podle Blooma (Bloomova taxonomie)

(upraveno a doplněno)

	Hladina	Popis cíle ve vztahu k žákovi	Činnostní slovesa pro popis v kurikulu
6	Hodnocení	Žák dokáže na základě dříve naučených norem a stanovených kritérií určit hodnotu nebo cenu složitého produktu	obhájí, vyvrátí, rozvíjí, kritizuje, posoudí, zaujme nebo podpoří stanovisko, ospravedlní, diskutuje, rozhodne, komentuje
5	Syntéza	Žák dokáže z několika jednodušších komponentů vytvořit původní a složitý výtvor	tvoří, staví, vytvoří originál, komponuje, napíše, vyřeší, předvede, stanoví, předpoví
4	Analýza	Žák dokáže rozčlenit složitou věc na její komponenty a vysvětlit, proč je daná složitá soustava vztahů uspořádána daným způsobem nebo jaké příčiny k takovému uspořádání vedly	porovná, analyzuje, rozdělí, vysvětlí proč, ukáže jak, nakreslí schéma, načrtne, vytvoří tabulku, vytvoří graf, změří
3	Aplikace	Žák aplikuje osvojené vzdělávací obsahy typu pojmů, pravidel, zákonitostí nebo algoritmů při řešení učebních situací a v nových souvislostech.	zařadí, aplikuje, nalézá, vybere, vypočítá, roztřídí, odhadne, zobecní, nalezne analogii, generalizuje
2	Porozumění	Žák porozumí souvislostem mezi součástmi vzdělávacího obsahu. Cílem vzdělávací aktivity je dosáhnout tohoto porozumění. Žák prokazuje dosažení tohoto cíle například tím, že dokáže vlastními slovy vyjádřit dříve naučenou látku.	definuje, vyjádří vlastními slovy, popíše, shrne, vysvětlí, objasní
1	Znalost	Žák si dokáže vybavit, reprodukovat nebo rozeznat vzdělávací obsahy, jejichž osvojení bylo cílem vzdělávací aktivity	reprodukuje, vybaví si, uvede seznam, identifikuje, nazve, označí, vyjmenuje, vybere, seřadí, pojmenuje, zaznamená

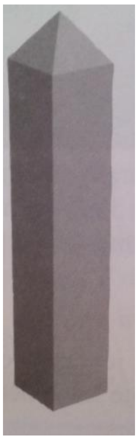
(převzato od Tomek, 2005)

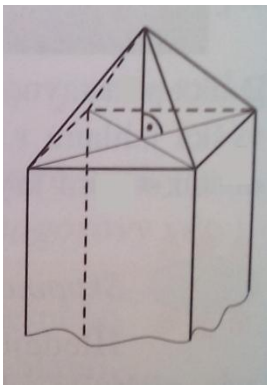
Příloha 2: Zadání testu testovaným žákům

1. Vypočítej objem hromady písku tvaru rotačního kužele o průměru 7 m a výšce $v = 2{,}5$ m

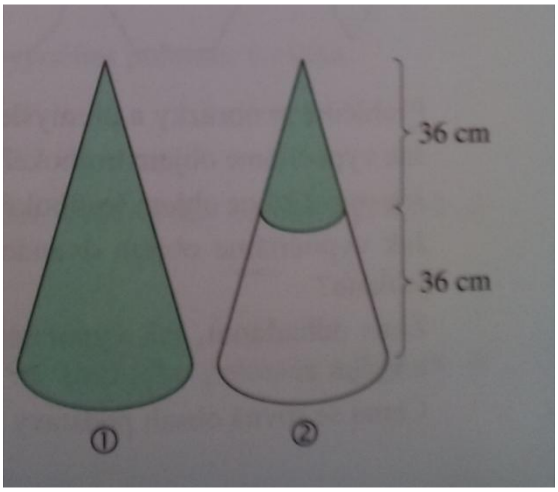
2. . Vypočítej povrch pravidelného čtyřbokého jehlanu s podstavnou hranou 6,4 cm a výškou jehlanu 10,5 cm.

3. Vypočítej hmotnost betonového bloku, jehož spodní část tvoří pravidelný čtyřboký hranol a vrchní část pravidelný čtyřboký jehlan, viz obrázek 1, 2. Délka podstavné hrany je 60 cm. Betonový blok je vysoký 3,4 m, přičemž výška spodní části bloku je 3 m. Hustota betonu je 2 100 kg/m^3.


Obrázek 1


Obrázek 2

4. Firma opravující silnice chce pro zvýšení bezpečnosti opatřit výstražné kužele, kterými usměrňuje provoz, reflexním nátěrem. Výstražný kužel je dutý výlisek, který má tvar kužele bez podstavy s průměrem 42 cm a výškou 72 cm. Firma zvažuje dvě varianty nátěru:
   1) opatří nátěrem celý kužel
   2) natře pouze horní polovinu kužele.



Obrázek 3

   a. Učeň Václav odhaduje, že se při variantě 2) sníží spotřeba barvy o 50 %. Je Vaškův odhad správný?
      A. ANO
      B. NE
   b. Jak velká plocha se bude na jednom kuželu natírat při variantě 1)?
      A. 6 330 cm^2
      B. 4 9,46 m^2
      C. 4 946 cm^2
      D. 633 m^2
      E. ani jedna odpověď není správně. Správně je………………..
   c. Jak velká plocha se bude na jednom kuželu natírat při variantě 2)?
      A. 1 236 cm^2
      B. 1 583 cm^2
      C. 1 58,3 dm^2
      D. 1 23,6 dm^2
      E. ani jedna odpověď není správně. Správně je………………..
   d. O kolik procent je nižší spotřeba barvy při variantě 2) než při variantě 1)?
      A. o 25 %
      B. o 50 %
      C. o 75 %
      D. ani jedna odpověď není správně. Správně je ………………
5. Napiš, v jakém pořadí jsi řešil jednotlivé úlohy.

Příloha 3: Ukázka nejlepšího řešení testu žáka ze třídy se zaměřením

11/32 10:55

② $a = 6{,}4\ cm$
$v_j = 10{,}5\ cm$
$S = ?\ cm^2$

$S_p = a^2$
$S_p = 6{,}4^2$
$S_p = 40{,}96\ cm^2$

$S_{pl} = 4 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$
$S_{pl} = 4 \cdot \frac{6{,}4 \cdot 11}{2}$
$S_{pl} = 4 \cdot 35{,}2$
$S_{pl} = 140{,}8\ cm^2$

$S = S_p + S_{pl}$
$S = 40{,}96 + 140{,}8$
$S = 181{,}76 \doteq 181{,}8\ cm^2$

$v_a^2 = 10{,}5^2 + 3{,}2^2$
$v_a^2 = 110{,}25 + 10{,}24$
$v_a = \sqrt{120{,}49}$
$v_a \doteq 11\ cm$

Povrch stanu je přibližně 181,8 cm².

① $d = 7\ m$ $r = 3{,}5\ m$
$v = 2{,}5\ m$
~~$V = \frac{S_p \cdot v}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot v}{3}$~~
$V = ?\ m^3$
$V = \frac{\pi r^2 \cdot v}{3}$
$V = \frac{96{,}2\ m^3}{3}$
$V \doteq 32{,}1\ m^3$

Objem hromady písku je 32,1 m³.

③ $a = 60\ cm$
$v_j = 40\ cm$
$v_h = 3\ m = 300\ cm$
$\rho = 2100\ kg/m^3$
$m = ?\ kg$
$V = ?\ m^3$

$V = V_j + V_h$
$V = 0{,}048 + 1{,}08$
$V = 1{,}13\ m^3$

$V_j = \frac{S_p \cdot v_j}{3}$
$V_j = \frac{60^2 \cdot 40}{3}$
$V_j = 48000\ cm^3 = 48\ dm^3 = 0{,}048\ m^3$

$V_h = S_p \cdot v_h$
$V_h = 60^2 \cdot 300$
$V_h = 1080000\ cm^3 = 1{,}08\ m^3$

$m = \rho \cdot V$
$m = 2100 \cdot 1{,}13$
$m = 2373\ kg$

Betonový sloup bude vážit 2373 kg.

(4)

$d = 62\,cm$ $r = 21\,cm$

$v = 72\,cm$

$S_1 = ?\,cm$

$S_1 = \pi r^2 + \pi r s$

$S_1 = \cancel{1385} + 4966$

$S_1 = 4966\,cm^2 = 49{,}66\,dm^2$ ✓

72 75 21

$s^2 = 72^2 + 21^2$

$s^2 = 5184 + 441$

$s = \sqrt{5625}$

$s = 75\,cm$ ✓

$+ 4966 : 6331 = 100$

$r = 10{,}5$ $s = 37{,}5\,cm$

$v = 36\,cm$

$S_2 = \pi r s$

$S_2 = 1236{,}6\,cm^2$

$= 1236\,cm^2$

$= 12{,}36\,dm^2$ ✓

36 37,5 10,5

$s^2 = 36^2 + 10{,}5^2$

$s^2 = 1296 + 110{,}25$

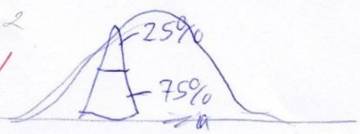
$s = \sqrt{1406{,}25}$

$s = 37{,}5\,cm$ ✓

a) ~~B. NE~~   B. NE ✓ 1

b) C. 4966 cm² ✓ ~~B. 49,66~~ 2

c) A. 1236 cm² 2 ✓



d) 4966 = 100%

49,66 = 1%

$1236 : 49{,}66 = 24{,}98 \approx 25\%$

C. ≈ 75% 2 ✓

Příloha 4: Ukázka nejlepšího řešení testu žáka z „klasické“ třídy

2, $S = S_p + S_{pl}$
$S = 40{,}96 + 93$
$S = 133{,}96\ cm^2$

$S_p = a \cdot a$
$S_p = 6{,}4 \cdot 6{,}4$
$S_p = 40{,}96\ cm^2$

$S_{pl} = 4 \cdot S_\Delta$
$S_{pl} = 4 \cdot 23{,}25$
$S_{pl} = 93\ cm^2$

$x^2 = 6{,}4^2 + 6{,}4^2$
$x^2 = 81{,}92$
$x = \sqrt{81{,}92}$
$x \doteq 9$

$v_a^2 = 10{,}5^2 + 3{,}2^2$
$v_a^2 = 110{,}25 + 10{,}24$
$v_a = \sqrt{120{,}49}$
$v_a \doteq 10{,}9\ cm$

$S_\Delta = \frac{a \cdot v_a}{2}$
$S_\Delta = \frac{6{,}4 \cdot 10{,}9}{2}$
$S_\Delta \doteq 23{,}25\ cm^2$

$y^2 = 10{,}5^2 + 4{,}5^2$
$y^2 = 110{,}25 + 20{,}25$
$y^2 = 130{,}5$
$y = \sqrt{130{,}5}$
$y \doteq 11{,}4\ cm^2$

1, $V = \frac{S_p \cdot v}{3}$
$V = \frac{\pi r^2 \cdot v}{3}$
$V = \frac{3{,}14 \cdot 12{,}29 \cdot 2{,}5}{3}$
$V = \frac{96{,}4765}{3}$
$V \doteq 32{,}15\ cm^3$

3,

(5) 0

4, a) Ne
b) E
Správná odpověď je $4945{,}5\ cm^2$
c) A 1236
d) C 75%

pouze S_{pl}

$S = \pi r \cdot (r+s)$
$S = 3{,}14 \cdot 21 \cdot (21+75)$
$S = 6330{,}24\ cm^2$

$s^2 = 72^2 + 21^2$
$s^2 = 5184 + 441$
$s = \sqrt{5625}$
$s = 75\ cm$

$S_p = \pi r^2$
$S_p = 3{,}14 \cdot 21^2$
$S_p = 1384{,}74$

~~6330,24~~
~~− 1384,74~~
~~4945,50~~

$x^2 = 37{,}5^2 - 36^2$
$x^2 = 1406{,}25 - 1296$
$x = \sqrt{110{,}25}$
$x = 10{,}5$

pouze S_{pl}

$S = \pi r \cdot (r+s)$
$S = 3{,}14 \cdot 10{,}5 (10{,}5 + 37{,}5)$
$S = 1582{,}56$

$S_p = \pi r^2$
$S_p = 3{,}14 \cdot 110{,}25$
$S_p = 346{,}185$

$S_{pl} = 1236{,}375\ cm^2$

12:45 – 13:20

5, 2, 1, 4, 3

Příloha 5: Ukázka nejhoršího řešení testu žáka ze třídy se zaměřením

10:05 9.A 10 14

4) $d = 42\ cm$

$v = 72\ cm$

$r = 21\ cm$

$s = 75\ cm$

$\cancel{s^2 = r^2 + v^2}$

$\cancel{s^2 = \sqrt{5625}}$

$\cancel{s = 75\ cm}$

$s^2 = r^2 + v^2$

$s^2 = 21^2 + 72^2$

$s = \sqrt{5625}$

$s = 75\ cm$ ✓

$\cancel{S = \pi r^2 (r+s)}$

$\cancel{S = 3{,}14 \cdot 21^2 (21+75)}$

$\cancel{S \doteq 133\,002\ cm^2}$

$\cancel{S \doteq 1330\ dm^2}$

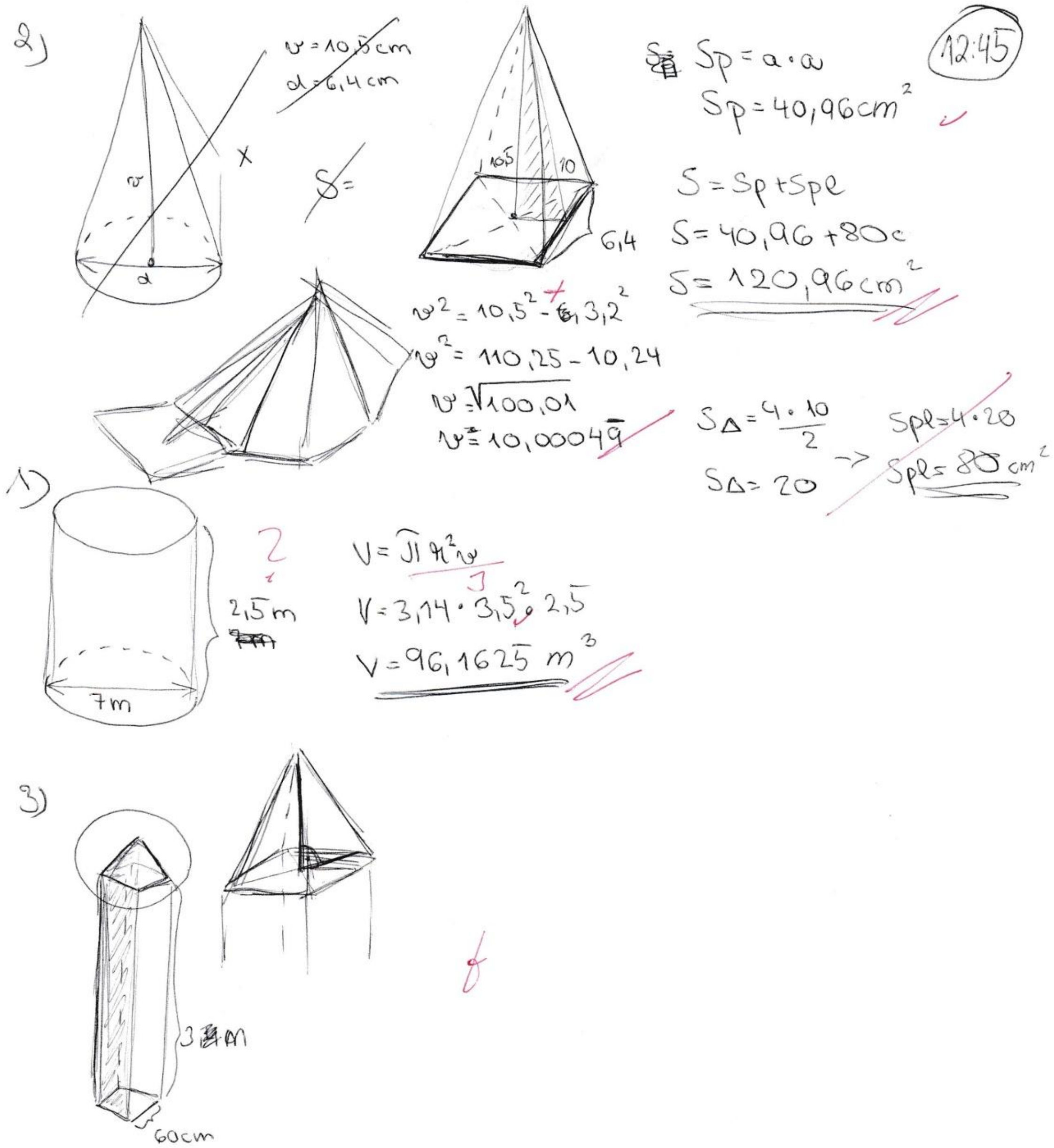
$S = (r+s)$

$S = (21+75)$

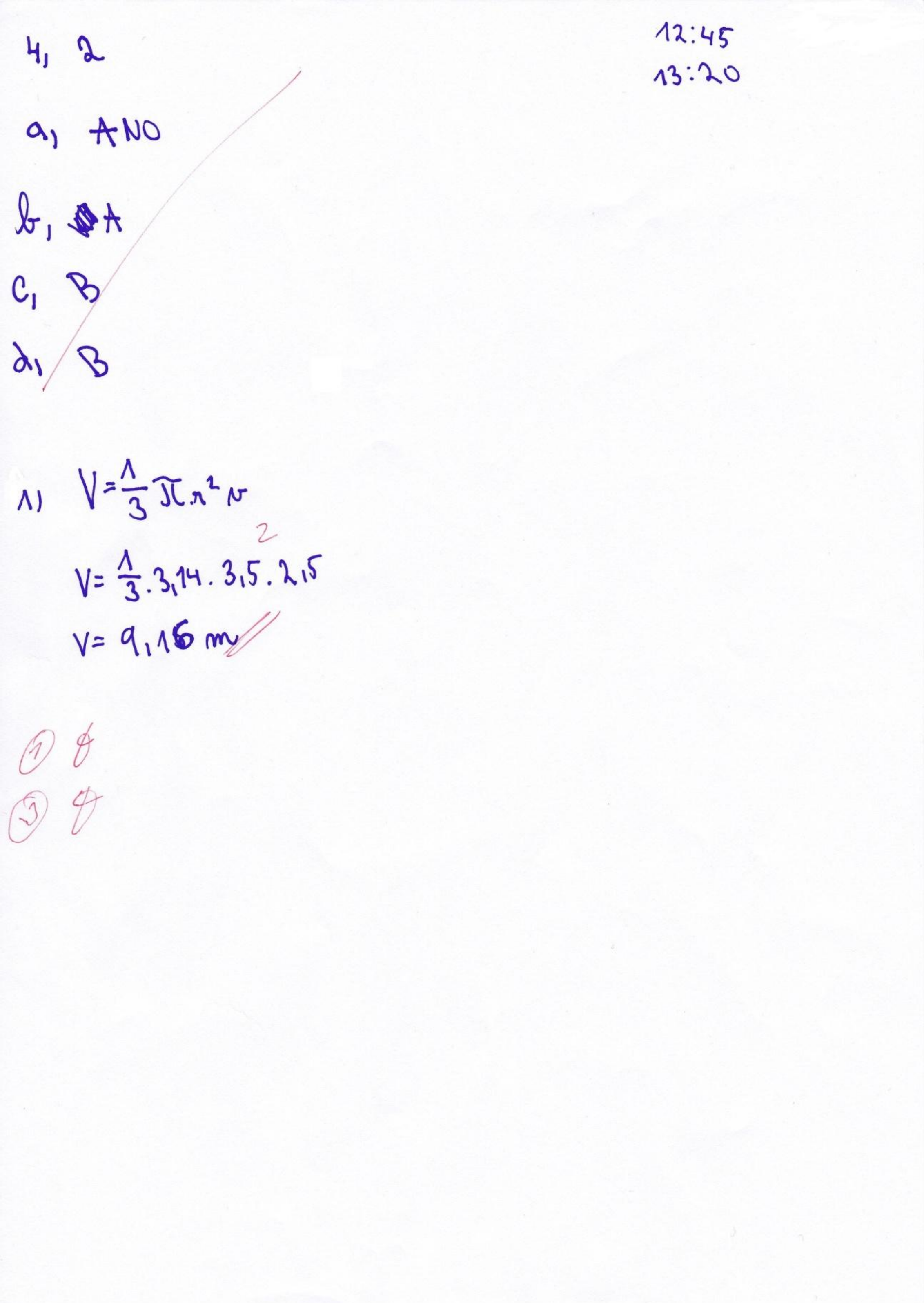
$S = 96\ cm^2$

4a – ne není. Ušetří se více, než 50% barvy. ✓

Příloha 6: Ukázka nejhoršího řešení testu žáka z „klasické“ třídy



Příloha 7: Ukázka nejhoršího řešení testu žáka z „klasické“ třídy



12:45
13:20

4, 2

a, ANO

b, A

c, B

d, B

1) $V = \frac{1}{3} \pi r^2 v$

$V = \frac{1}{3} . 3,14 . 3,5^2 . 2,5$

$V = 9,16\ m$

1 0

3 0

Seznam grafů

Seznam obrázků

Seznam tabulek